Soluciones Ficha 3: Álgebra

1. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

b) $Q(x) = 3x^3 - 8x + 8$

a) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$Div(1) = \{\pm 1\}$

	1	−1	−1	1
−1		1	0	−1
	1	0	−1	0
1		1	1	
	1	1	0	
−1		−1		
	1	0		

$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$

b) $Q(x) = 3x^3 - 8x + 8$

$Div(8) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

	3	0	−8	8
−2		−6	12	−8
	3	−6	4	0

$3x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}i}{3}$

$Q(x) = 3x^3 - 8x + 8 = (x+2)(3x^2 - 6x + 4)$

2. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas, simplificando el resultado cuando se pueda:

a) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x^2+1}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ b) $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}}{\left(\dfrac{1+x}{1-x} - 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{1+x}\right)}$

a) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x^2+1}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

Numerador:

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x-1)}{x^2-1}-\frac{(x^2+1)}{x^2-1}=\frac{x^2-2x+1-x^2-1}{x^2-1}=\frac{-2x}{x^2-1}$$

Denominador:

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x+1)}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2+2x+1+x^2+1}{x^2-1}=\frac{2x^2+2x+2}{x^2-1}$$

Expresión:

$$\frac{\frac{x-1}{x+1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}}{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\frac{\frac{-2x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+2x+2}{x^2-1}}=\frac{-2x}{2x^2+2x+2}=\frac{-x}{x^2+x+1}$$

b) $$\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}$$

Numerador:

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{(1+x)(1+x)}{1-x^2}-\frac{(1-x)(1-x)}{1-x^2}=\frac{x^2+2x+1-(1-2x+x^2)}{1-x^2}=\frac{4x}{1-x^2}$$

Denominador:

$$\frac{1+x}{1-x}-1=\frac{1+x-(1-x)}{1-x}=\frac{1+x-1+x}{1-x}=\frac{2x}{1-x}$$

$$1-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{2x^2}{(1-x)(x+1)}$$

Expresión.

$$\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{\frac{4x}{1-x^2}}{\frac{2x^2}{(1-x)(x+1)}}=\frac{4x\cancel{(1-x^2)}}{2x^2\cancel{(1-x^2)}}=\frac{2}{x}$$

3. Resuelve la siguiente ecuación de primer grado:

$$6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$$

$$6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$$

$$\frac{6\cdot(x+1)}{8}-\frac{6\cdot(2x-3)}{16}=\frac{3\cdot 3}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{3\cdot 3x}{8}+\frac{3\cdot 2}{8}$$

$$\frac{6x+6}{8}-\frac{12x-18}{16}=\frac{9x}{4}-\frac{3}{4}-\frac{9x}{8}+\frac{6}{8}$$

$$\frac{2(6x+6)}{16}-\frac{12x-18}{16}=\frac{4\cdot 9x}{16}-\frac{4\cdot 3}{16}-\frac{2\cdot 9x}{16}+\frac{2\cdot 6}{16}$$
$$2\cdot(6x+6)-(12x-18)=36x-12-18x+12$$
$$12x+12-12x+18=36x-12-18x+12$$
$$12x-12x-36x+18x=-12+12-12-18$$
$$-18x=-30$$
$$x=\frac{-30}{-18}=\frac{5}{3}$$

4. Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$$

$$\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$$
$$\frac{4(2x-1)(2x+1)}{12}+\frac{3(x-2)^2}{12}=\frac{2(3x+4)}{12}+\frac{4x^2}{12}$$
$$4(2x-1)(2x+1)+3(x-2)^2=2(3x+4)+4x^2$$
$$16x^2-4+3x^2-12x+12-6x-8-4x^2=0$$
$$15x^2-18x=0\rightarrow 3x(5x-6)=0\rightarrow\begin{cases}3x=0\rightarrow x=0\\ 5x-6=0\rightarrow x=\frac{6}{5}\end{cases}$$

5. Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada:

$$36x^4-13x^2+1=0$$

$$y=x^2$$
$$36y^2-13y+1=0\rightarrow y=\frac{13\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 36\cdot 1}}{2\cdot 36}=\begin{cases}1/9\\ 1/4\end{cases}$$
$$y=x^2=\frac{1}{9}\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}\rightarrow(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)\\ \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)\end{cases}$$
$$y=x^2=\frac{1}{4}\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}\rightarrow(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\\ \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

6. Resuelve la siguiente ecuación radical (recuerda que hay que comprobar si los valores obtenidos son realmente solución de la ecuación que nos dan):

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+10}=7$$

$$\sqrt{2x-3}=7-\sqrt{x+10}\rightarrow\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=\left(7-\sqrt{x+10}\right)^2\rightarrow 2x-3=49-14\sqrt{x+10}+x+10\rightarrow$$

$$\rightarrow 14\sqrt{x+10}=49+x+10-2x+3\rightarrow\left(14\sqrt{x+10}\right)^2=\left(62-x\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow 196\left(x+10\right)=3844-124x+x^2\rightarrow x^2-320x+1884=0\rightarrow x=\begin{cases}6\\314\end{cases}$$

Comprobaciones:

$x=6\rightarrow\sqrt{2\cdot 6-3}+\sqrt{6+10}=7\rightarrow 7=7\rightarrow x=6$ es solución

$x=314\sqrt{2\cdot 314-3}+\sqrt{314+10}=7\rightarrow 43=7\rightarrow x=314$ no es solución

7. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por Gauss: $\begin{cases}x+y+z=5\\2x-y=2\\y+3z=5\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\2&-1&0&2\\0&1&3&5\end{array}\right)\xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\0&-3&-2&-8\\0&1&3&5\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\0&1&3&5\\0&-3&-2&-8\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3=3F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\0&1&3&5\\0&0&7&7\end{array}\right)\begin{array}{l}[1]\\[2]\\[3]\end{array}$$

De [3]: $7z=7\rightarrow z=1$

Sustituimos en [2]: $y+3z=5\rightarrow y=2$

Sustituimos en [1]: $x+y+z=5\rightarrow x=2$

Solución: $\left(x,y,z\right)=\left(2,2,1\right)$

8. Resuelve el sistema de ecuaciones no lineales: $\begin{cases}x^2+y-2xy=19\\3y+x=-3\end{cases}$

Depejamos x de la segunda ecuación: $x=-3-3y$

Sustituimos en la primera:

$\left(-3-3y\right)^2+y-2\left(-3-3y\right)y=19$

$9+9y^2+18y+y+6y+6y^2-19=0$

$15y^2+25y-10=0\rightarrow y=\begin{cases}1/3\\-2\end{cases}$

Como $x=-3-3y=\begin{cases}-3-3\cdot\dfrac{1}{3}=-4\\-3-3\cdot\left(-2\right)=3\end{cases}$

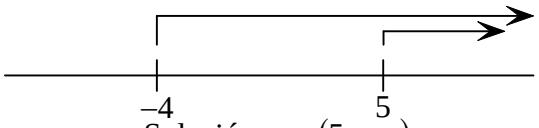
Soluciones: $\left(x,y\right)=\begin{cases}\left(3,-2\right)\\\left(-4,\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$

9. Resuelve la siguiente inecuación: $\dfrac{x-5}{x+4} > 0$

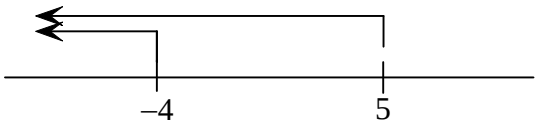
$$\begin{cases} x-5>0 \rightarrow x>5 \\ x+4>0 \rightarrow x>-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-5<0 \rightarrow x<5 \\ x+4<0 \rightarrow x<-4 \end{cases}$$

Soluciones:
$x \in (-\infty,-4) \cup (5,+\infty)$



Solución: $x \in (5,+\infty)$

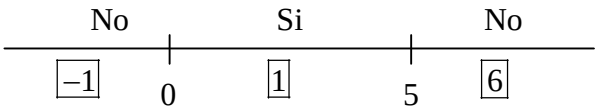


Solución: $x \in (-\infty,-4)$

10. Resuelve la inecuación: $x(x+5) > 2x^2$

$x^2+5x-2x^2>0$

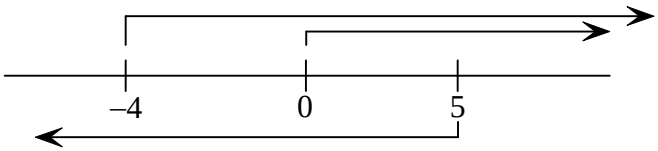
$-x^2+5x=0 \rightarrow x(-x+5)=0 \rightarrow x=\begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases}$



Soluciones: $x \in (0,5)$

11. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 5>x \\ -x<4 \\ 2x>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5>x \rightarrow x>5 \\ -x<4 \rightarrow x>-4 \\ 2x>0 \rightarrow x>0 \end{cases}$$



Las soluciones son: $x \in (0,5)$