POTENCIAS Y RAÍCES DE NÚMEROS REALES

POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

Antes de proceder a la definición de potencia, haremos una pequeña introducción.

El producto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ tiene sus cinco factores iguales. Este producto se puede indicar de forma abreviada como 2^5.

$$\boxed{2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

Esta forma abreviada se llama potencia y se lee dos elevado a cinco o dos a la quinta.
Los elementos que definen una potencia son:

2^5 → **Exponente:** El número de veces que se repite el factor**.**

2 → **Base:** es el factor que se repite.

Si el exponente es :

2, la potencia $\mathbf{b}^2$ se lee **b** al cuadrado

3, la potencia $\mathbf{b}^3$ se lee **b** al cubo.

Para los valores 4, 5, 6,……n del exponente, las potencias se expresarían como **b** a la cuarta, quinta, sexta ... y, en general, enésima potencia.

Sea *a* un número real y *n* un número entero. Se define a^n como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces}} \qquad \text{si} \quad n > 0$$

$$a^0 = 1$$

Cuando el exponente es negativo se escribe *–n,* siendo *n* > 0

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{con} \quad a \neq 0$$

Ejemplo 1.:

POTENCIAS Y RAÍCES DE NÚMEROS REALES

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ $\quad$ $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $\quad$ $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Fíjate que en $(-2)^4$ el exponente es cuatro y debajo tiene un paréntesis, luego la base será lo que haya dentro del paréntesis

$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Observa que en -2^4 el exponente es cuatro y debajo tiene un 2, luego la base será el 2, no -2

$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

En la potencia 7^{-2} el exponente es negativo -2, utilizando la definición hemos conseguido que aparezca una potencia con exponente positivo

$-7^{-2} = -\frac{1}{7^2} = -\frac{1}{49}$

En la potencia 7^{-2} el exponente es negativo -2, utilizando la definición hemos conseguido que aparezca una potencia con exponente positivo. El signo menos que aparece delante de 7^{-2} sólo indica que una vez calculada esta potencia se multiplique por -1.

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO.

- $a^1 = a$
- El producto de dos potencias de la misma base es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la diferencia de los exponentes.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- El producto de dos potencias con el mismo exponente es otra potencia que tiene por base el producto de las bases y por exponente el mismo.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- El cociente de dos potencias con el mismo exponente es otra potencia que tiene por base

el cociente de las bases y por exponente el mismo.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- La potencia de una potencia es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente el producto de los exponentes.

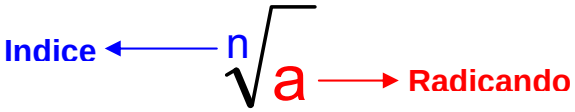
$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

RAÍZ DE UN NÚMERO

A partir de la definición de potencia n-ésima de a, siendo n un número natural si $x^n = a$, x es la raíz n-ésima de a y se escribe $\sqrt[n]{a} = x$. Es decir:

$$x = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a$$

Al símbolo $\sqrt[n]{}$ se llama radical de índice n, y a se llama radicando.



Dependiendo del valor del índice, los radicales se leen y se representan según se indica en la tabla siguiente.

Índice	Lectura	Radical
2	[1]raíz cuadrada	$\sqrt{}$
3	raíz cúbica	$\sqrt[3]{}$
4	raíz cuarta	$\sqrt[4]{}$
5	raíz quinta	$\sqrt[5]{}$
…..	….	….

[1] En el radical de la raíz cuadrada no se pone el 2 en el índice.

Ejemplo 2.:

$\sqrt[3]{27} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3^3 = 27$ $\qquad$ $\sqrt[4]{16} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^4 = 16$

$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5^3 = 125$ $\qquad$ $3^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{9} = 3$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

NÚMERO DE RAÍCES.

Si el índice es par hay tres posibilidades:

- Radicando positivo: existen dos raíces opuestas. $\sqrt{16} = \pm 4$
- Radicando igual a 0: tiene por raíz 0.
- Radicando negativo: no tiene raíces, ya que todo número elevado a una potencia de exponente par es positivo.

$$\sqrt{-4} = x \quad \Rightarrow \quad x^2 = -4 \text{ IMPOSIBLE}$$

Si el índice es impar, todo número tiene una sola raíz:

- positiva, si el radicando es positivo $\sqrt[3]{8} = 2$
- negativa, si el radicando es negativo $\sqrt[3]{-8} = -2$
- nula si el radicando es 0. $\sqrt[3]{0} = 0$

COMPARAR RADICALES.

De dos radicales con el mismo índice es mayor el que tiene mayor radicando.
Supongamos que tenemos que ordenar $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$ .Llamemos x a $\sqrt[3]{5}$ e y a $\sqrt[3]{7}$.

$$\sqrt[3]{5} = x \Rightarrow x^3 = 5$$

$$\sqrt{7} = y \Rightarrow y^3 = 7$$

Entonces ***y*** tiene que ser mayor que ***x*** porque de no ser así ***y*** al cubo valdría menos que ***x*** al cubo.

RADICALES EQUIVALENTES.

Los radicales que expresan el mismo número real son equivalentes.

Por ejemplo $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{5^2}$, $\sqrt[6]{5^3}$ son equivalentes puesto que:

$$\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[6]{5^3} = 2.236067....$$

Se puede obtener radicales equivalentes por:

AMPLIFICACIÓN:

Multiplicando el índice de un radical y el exponente del radicando por un mismo número natural distinto de cero.
Cuando haya que calcular un radical de índice par, equivalente a un radical que tiene el índice impar y el radicando negativo hay que tener cuidado al aplicar la regla anterior.

Ejemplo 3.:

En el radical $\sqrt[3]{-8}$, el radicando es -5. Si quisiéramos obtener un radical equivalente de índice 6, deberíamos multiplicar el exponente del radicando por 2.

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} \quad \Rightarrow \quad -2 = 2 \quad \textbf{IMPOSIBLE}$$

Para evitar estos errores procedemos de la siguiente forma:

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[6]{8^2}$$

Recurriremos a la amplificación de índices cuando necesitemos poner el mismo índice a distintos radicales: multiplicación o división de radicales y comparación de radicales.

Ejemplo 4.:

Calcula un radical equivalente a cada uno de los siguientes radicales, con el índice común:
$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{11}$.

Tenemos que buscar un índice que sea múltiplo de 2, 3 y 4 que son los índices de los radicales que nos han dado. De todos los múltiplos buscamos el más pequeño, es decir, el mínimo común múltiplo. Calculando el mínimo común múltiplo trabajaremos con números más pequeños y así los cálculos que tengamos que hacer serán más sencillos.

m.c.m. (2, 3, 4) = 12

Ponemos a todos los radicales el índice 12 y modificamos el exponente del radicando según se

explicado antes.

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} \qquad \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} \qquad \sqrt[4]{11} = \sqrt[12]{11^2}$$

Ejemplo 5.:

Ordena los radicales $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{11}$.

Para ordenarlos buscamos radicales equivalentes a los dados de forma que los tres tengan el mismo índice. Por el ejemplo anterior sabemos que estos son $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{5^4}$, $\sqrt[12]{11^2}$.
Como todos tienen el mismo índice, será mayor el que mayor radicando tenga.

$$11^2 < 5^4 < 3^6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[12]{11^2} < \sqrt[12]{5^4} < \sqrt[12]{3^6} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{11} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

SIMPLIFICACIÓN:

Dividiendo el índice de un radical y el exponente del radicando por un mismo número natural distinto de cero. De esta forma se procede cuando nos pidan simplificar radicales.

POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO.

Una potencia de exponente fraccionario es igual a un radical, donde:

- El denominador de la fracción es el índice del radical, y
- El numerador de la fracción es el exponente del radicando.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

En el cálculo con potencias de exponente fraccionario son válidas las mismas propiedades que para las potencias con exponente entero.

Ejemplo 6.:

$$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} \qquad 7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7} \qquad 3^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{3^2}}$$

Utilizando los exponentes fraccionarios es más fácil obtener radicales equivalentes, ya que consiste en obtener fracciones equivalentes.

Ejemplo 7.:

$$7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{6}} = 7^{\frac{3}{9}} = 7^{\frac{5}{15}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[9]{7^3} = \sqrt[15]{7^5}$$

Ejemplo 8.:

$$\sqrt[3]{7^3} = 7^{\frac{3}{3}} = 7^1 = 7$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2$$

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{3^3} = -3^{\frac{3}{3}} = -3 \quad \text{ó} \quad \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = (-3)^{\frac{3}{3}} = (-3)^1 = -3$$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES.

- $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n impar; y $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si n par
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ si n impar, o si n par con a,b ≥ 0
-
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ si n impar, o si n par con a,b ≥ 0
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ si m,n impares, en otro caso tiene que ser a ≥ 0
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo 9.:

a. $\sqrt[3]{5^3} = 5$

b. $\sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

c. $\sqrt[3]{\frac{9}{7}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{7}}$

d. $\sqrt[3]{\sqrt{14}} = \sqrt[3 \cdot 2]{14} = \sqrt[6]{14}$

e. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$

Ejemplo 10.:

Para multiplicar o dividir radicales que no tienen el mismo índice, hay que conseguir radicales equivalentes de índice común.

$$\frac{\sqrt[9]{2^7}}{\sqrt[12]{6}\cdot\sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[36]{2^{28}}}{\sqrt[36]{6^3}\cdot\sqrt[36]{5^{27}}} = \sqrt[36]{\frac{2^{28}}{6^3\cdot 5^{27}}} = \sqrt[36]{\frac{2^{28}}{3^3\cdot 2^3\cdot 5^{27}}} = \sqrt[36]{\frac{2^{25}}{3^3\cdot 5^{27}}}$$

m.cm. (9, 4 y 12) = 36

CÁLCULO CON POTENCIAS Y RAÍCES.

Como hemos dicho antes, las potencias de exponente fraccionario verifican las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.
Las operaciones con radicales se simplifican si se pasan a potencias de exponente fraccionario.

$a^n\cdot a^m = a^{n+m}$	$5^{\frac{2}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{11}{15}}$	$\sqrt{7}\cdot\sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{2}{5}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}} = 7^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{7^9}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$5^{\frac{2}{5}} : 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{3} : \sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{3}$
$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$2^{\frac{3}{5}}\cdot 3^{\frac{3}{5}} = (2\cdot 3)^{\frac{3}{5}} = 6^{\frac{3}{5}}$	$\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{9} = 8^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{3}} = (8\cdot 9)^{\frac{1}{3}} = 72^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{72}$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{6^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{3}{5}}} = \left(\frac{6}{3}\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{3}{5}}$	$\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{10^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$
$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$	$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{9}}$	$\sqrt{\sqrt[3]{5^2}} = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{6}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES.

La suma y resta de radicales sólo se puede efectuar si los radicales tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo 11.:

$$\sqrt{5}+3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

Ejemplo 12.:

$$4\sqrt{3}-2\sqrt{7}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-2\sqrt{7}$$

$\sqrt[3]{7}$ es el equivalente a $\sqrt[6]{7^2}$

Ejemplo 13.:

$$\sqrt[3]{7}-3\sqrt[6]{49}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{7}-3\sqrt[6]{7^2}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{7}-3\sqrt[3]{7}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{7}=-2\sqrt[3]{7}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{7}=-\frac{10}{5}\sqrt[3]{7}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{7}=$$

$$=-\frac{10}{5}\sqrt[3]{7}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{7}=-\frac{8}{5}\sqrt[3]{7}$$

Observación: La raíz de una suma o resta **NO** se puede separar en suma o resta de raíces ($\sqrt{8+16}\neq\sqrt{8}+\sqrt{16}$)

RACIONALIZACIÓN.

Cuando hay raíces en el denominador de una fracción, ***racionalizar*** dicha fracción consiste en encontrar otra expresión equivalente en la que ya no aparezcan las raíces del denominador.
Para ello se multiplica el numerador y el denominador por la expresión adecuada, de forma que al operar, aplicando la propiedad 1, desaparezca la raíz deseada.

Casos:

Cuando es una raíz cuadrada: se multiplica numerador y denominador por la raíz de dicho denominador.

Ejemplo 14.:

Propiedad 1

$$\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Cuando es una raíz de índice distinto de 2: se multiplica numerador y denominador por una raíz del mismo índice que el denominador, pero con un radicando elevado a un exponente que complete la potencia existente hasta el índice de dicha raíz.

Ejemplo 15.:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}} = \frac{5\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{5\sqrt[3]{4^2}}{4} = \frac{5\sqrt[3]{16}}{4}$$

Para que al aplicar la propiedad 1 "desaparezca" la raíz, necesitamos que la potencia del radicando coincida con el índice, es decir, que sea 3. Entonces, habrá que multiplicar por $\sqrt[3]{4^2}$ ya que al multiplicar los radicandos $\left(4\cdot 4^2\right)$ y juntar el denominador en una única raíz, las potencias se suman, y resulta 4^3
Se trata de ver cuánto le falta a la potencia del radicando para conseguir el índice, basta restar: índice – potencia.
En este ejemplo: 3 – 1 = 2

$$\frac{9}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{9\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^4}\cdot\sqrt[5]{3}} = \frac{9\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{9\sqrt[5]{3}}{3} = 3\sqrt[5]{3}$$

Simplificando

5 – 4 = 1 ⇒ la potencia del radicando por la que hay que multiplicar es 1, es decir, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[5]{3}$

Cuando el denominador sea un binomio con raíces cuadradas: se multiplican numerador y denominador por lo que se conoce como el conjugado del denominador, que es la misma expresión pero cambiando la suma por resta o la resta por suma. Por ejemplo, el conjugado de $(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ es $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ y viceversa.

Ejemplo 16.:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1\cdot(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3^2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{3\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{7})} = \frac{3\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{7})} = \frac{3\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{25-49} = \frac{3\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{-24} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-8}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Pueden utilizarse las definiciones y propiedades anteriores para realizar simplificaciones descomponiendo el radicando en producto de potencias, agrupar raíces de índices distintos y otras transformaciones y operaciones.

Ejemplo 17.: (Extracción de factores del radicando)

a) $\sqrt{512} = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 2^4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

Descomponemos el radicando en factores y aplicamos la propiedad 1 para sacar fuera de la raíz aquellos factores cuya potencia coincide con el índice de la raíz.

Una forma más directa de buscar la potencia que sale fuera y la que queda dentro, es mediante la división de la potencia del factor del radicando entre el índice de la raíz; el cociente será la potencia a la que queda elevado el factor fuera ya de la raíz y el resto de la división, la potencia a la que quedará elevado como radicando dicho factor.

Aplicando esto al ejemplo de este apartado: $\sqrt{512} = \sqrt{2^9} = 2^4\sqrt{2^1} = 16\sqrt{2}$

$$\begin{array}{cc} 9 & 2 \\ 1 & 4 \end{array}$$

b) $\sqrt{729} = \sqrt{3^6} = \sqrt{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$

(Si lo hacemos dividiendo la potencia entre el índice, el cociente de 6:2 es 3 y el resto es cero; como un número elevado a cero es 1 y la raíz de 1 es 1, resulta: $\sqrt{729} = \sqrt{3^6} = 3^3\sqrt{3^0} = 3^3 = 27$)

c) $\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^1} = 2^3 \cdot \sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$

De la otra forma: $\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2^{10}} = 2^3 \cdot \sqrt[3]{2^1} = 8\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt[3]{2592} = \sqrt[3]{2^5 \cdot 3^4} = 2^1 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 3} = 6\sqrt[3]{12}$

Para el factor 2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cociente de } 5:3 \rightarrow 1 \\ \text{Resto de } 5:3 \rightarrow 2 \end{array} \right\}$ Para el factor 3 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cociente de } 4:3 \rightarrow 1 \\ \text{Resto de } 4:3 \rightarrow 1 \end{array} \right\}$

Ejemplo 18.: (Simplificación de raíces de índices distintos)

a) $\sqrt[6]{3^2} = 3^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

b) $$\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}}=\frac{10^{\frac{1}{6}}}{4^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{10^{\frac{1}{6}}}{4^{\frac{2}{6}}\cdot 2^{\frac{3}{6}}}=\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[6]{4^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{10}{4^2\cdot 2^3}}=\sqrt[6]{\frac{5\cdot 2}{(2^2)^2\cdot 2^3}}=\sqrt[6]{\frac{5\cdot 2}{2^4\cdot 2^3}}=\sqrt[6]{\frac{5}{2^6}}=\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{2^6}}=\frac{\sqrt[6]{5}}{2}$$

Para poder hacer simplificaciones, necesitamos que todos los factores estén bajo la misma raíz, es decir, tenemos que buscar un índice común para todas ellas y agruparlas después en una única. Esto puede conseguirse de una forma sencilla si convertimos las raíces en potencias fraccionarias y reducimos a común denominador las fracciones de los exponentes, ya que el denominador del exponente corresponde al índice de la raíz.

El denominador común será el mínimo común múltiplo de los denominadores.

No debemos olvidar que al buscar una fracción equivalente a una dada, es necesario transformar también el numerador, teniendo en cuenta la cantidad por la que hemos multiplicado el denominador para hacer lo mismo con el numerador.

c) $$\frac{\sqrt[9]{2^7}}{\sqrt[12]{6}\cdot\sqrt[4]{5^3}}=\frac{2^{\frac{7}{9}}}{6^{\frac{1}{12}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}}=\frac{2^{\frac{28}{36}}}{6^{\frac{3}{36}}\cdot 5^{\frac{27}{36}}}=\frac{\sqrt[36]{2^{28}}}{\sqrt[36]{6^3}\cdot\sqrt[36]{5^{27}}}=\sqrt[36]{\frac{2^{28}}{6^3\cdot 5^{27}}}=\sqrt[36]{\frac{2^{28}}{3^3\cdot 2^3\cdot 5^{27}}}=\sqrt[36]{\frac{2^{25}}{3^3\cdot 5^{27}}}$$

Ejemplo 19.: (Introducción de valores dentro de una raíz)

En algunas situaciones será necesario realizar transformaciones introduciendo números o expresiones como factores dentro de una raíz; por supuesto, sin que cambie la cantidad de partida. Teniendo en cuenta, de nuevo, la propiedad 1, bastará con introducir la expresión deseada elevada al índice de la raíz.

a) $5\sqrt{7}=\sqrt{5^2\cdot 7}=\sqrt{175}$

Ver ejemplo 11

b) $$x^3\cdot\sqrt{\frac{1+x}{x}}=\sqrt{\frac{(x^3)^2\cdot(1+x)}{x}}=\sqrt{\frac{x^6\cdot(1+x)}{x}}=\sqrt{x^5\cdot(1+x)}=x^2\cdot\sqrt{x\cdot(1+x)}=x^2\cdot\sqrt{x+x^2}$$

Podremos simplificar cuando el factor no sea nulo. En este caso, para $x\neq 0$

Ejemplo 20.: (Racionalización)

a) $$\frac{3}{\sqrt[7]{5^2\cdot 2^4}}=\frac{3\cdot\sqrt[7]{5^5\cdot 2^3}}{\sqrt[7]{5^2\cdot 2^4}\cdot\sqrt[7]{5^5\cdot 2^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[7]{5^5\cdot 2^3}}{\sqrt[7]{5^7\cdot 2^7}}=\frac{3\cdot\sqrt[7]{5^5\cdot 2^3}}{\sqrt[7]{5^7}\cdot\sqrt[7]{2^7}}=\frac{3\cdot\sqrt[7]{5^5\cdot 2^3}}{5\cdot 2}=\frac{3\cdot\sqrt[7]{5^5\cdot 2^3}}{10}$$

Para el 5: 7 – 2 = 5 ; Para el 2: 7 – 4 = 3

b) Racionaliza la expresión $\dfrac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}$, con a > 3:

$$\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}} = \frac{\sqrt{a+3}\cdot\sqrt{a-3}}{\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a-3}} = \frac{\sqrt{(a+3)\cdot(a-3)}}{(a-3)} = \frac{\sqrt{a^2-9}}{a-3}$$

c) $$\frac{3}{\sqrt[7]{6^2\cdot 2^4}} = \frac{3}{\sqrt[7]{3^2\cdot 2^2\cdot 2^4}} = \frac{3}{\sqrt[7]{3^2\cdot 2^6}} = \frac{3\sqrt[7]{3^5\cdot 2}}{\sqrt[7]{3^2\cdot 2^6}\cdot\sqrt[7]{3^5\cdot 2}} = \frac{3\sqrt[7]{3^5\cdot 2}}{\sqrt[7]{3^7\cdot 2^7}} = \frac{3\sqrt[7]{3^5\cdot 2}}{\sqrt[7]{3^7}\cdot\sqrt[7]{2^7}} = \frac{3\sqrt[7]{3^5\cdot 2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt[7]{3^5\cdot 2}}{2}$$

Descomponemos el 6 para agrupar los doses

Para el 3: 7 – 2 = 5 ; Para el 2: 7 – 6 = 1