UNIDAD 10:
CONTINUIDAD

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $x = a \in Dom(f)$ cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (1)$$

Aclaraciones:

- Para que una función sea continua en un punto, dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

  No tiene sentido decir que la función $y = \frac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$, por que dicho punto no pertenece a su dominio.
- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
  - $\exists f(a)$
  - Dichos valores coincidan: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una función es continua cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición.

Si una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en dicho punto.

Una función es continua por la derecha en un punto si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Una función es continua por la izquierda en un punto si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

Caracterización

Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow f \text{ continua por la derecha y por la izquierda en } x = a$$

Una función es continua en $[a,b]$ cuando:

(1) Sea continua en el intervalo abierto (a,b)

(2) Sea continua por la derecha en a

(3) Sea continua por la izquierda en b

2. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

- Las **funciones polinómicas**, $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, son continuas en todos los puntos.
- Las **funciones racionales**, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son continuas en su dominio.
- La **función exponencial**, $y=e^{f(x)}$, es continua siempre que lo sea $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y=\log f(x)$, es continua en todo punto x, tal que $f(x)>0$ y $f(x)$ sea continua.
- Las **funciones trigonométricas**, $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$, son siempre continuas. La función $y=\operatorname{tg} x$ es continua en su dominio: $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan y sean iguales.

3. CLASIFICACIÓN DE LAS DISCONTINUIDADES

1) Si $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $L\neq f(a)$ entonces se dice que f tiene una **discontinuidad evitable en el punto** $x=a$.

   El valor que deberíamos darle a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama valor verdadero de la función en a, y es:

$$f(a):=\lim_{x\to a} f(x)$$

2) Si $\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)=L,\ \exists \lim\limits_{x\to a+} f(x)=L'$ y $L\neq L'$ se dice que f presenta una **discontinuidad de salto o de primera especie en** a.

   En este caso, el valor

$$\left|\lim_{x\to a-} f(x)-\lim_{x\to a+} f(x)\right|$$

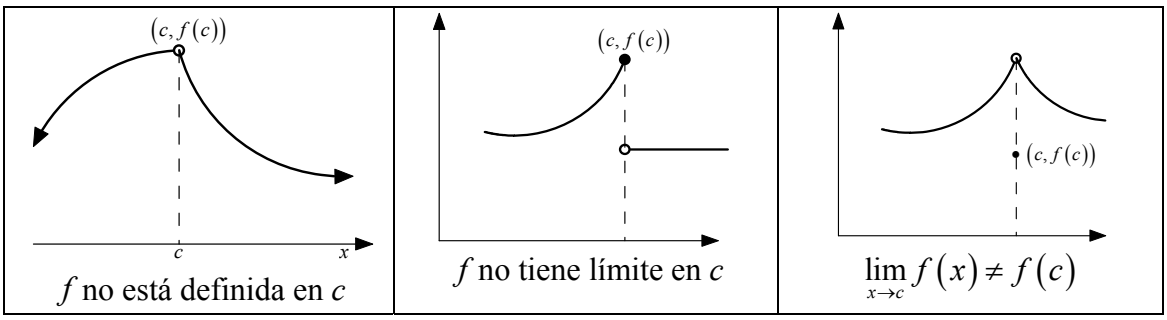
   se llama salto de la función en a, y puede ser finito o infinito.

3) Diremos que f presenta una **discontinuidad de tipo infinito en** a cuando

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ ó } -\infty$$

   Las discontinuidades que no sean ni evitables ni de primera especie se denominan **discontinuidades de segunda especie**, es decir, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.

Veamos gráficamente las *situaciones en las que una función no es continua en un punto*:



Un resultado que es importante conocer y memorizar:

- Toda función continua en un intervalo de la forma $[a,b]$ tiene máximo y mínimo absolutos.

4. EJERCICIOS

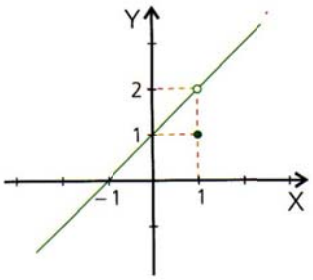
1. La función $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$, ¿es continua en $x=-3$?

2. Calcula k para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x\neq 1\\ k & \text{si } x=1\end{cases}$ sea continua en $x=1$.

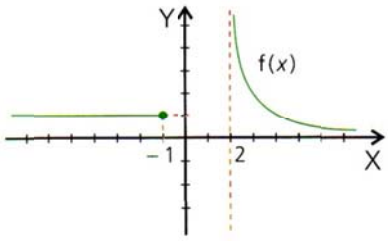
3. Representa la función $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si } x\geq 3\\ 4-x & \text{si } 1\leq x<3\\ 2 & \text{si } x<1\end{cases}$, y estudia su continuidad en los puntos $x=1$ y $x=3$.

4. ¿Cuál debe ser el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-(x+2)^2}{x} & \text{si } x\neq 0\\ k & \text{si } x=0\end{cases}$ sea continua?

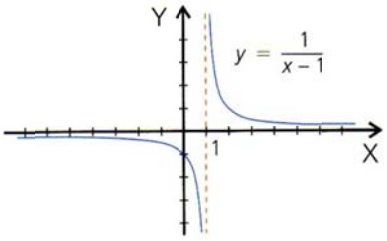
5. Justifica si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:



$x=1$



$x=-1$ y $x=2$



$x=1$

En caso de que no lo sean, indica el tipo de discontinuidad que presenta.

6. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{8}{x}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-49}$ c) $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\leq 2\\ 2x-1 & \text{si } x>2\end{cases}$

7. Considera la función $f(x)=\begin{cases}9 & \text{si } x\in Z\\ 12 & \text{si } x\notin Z\end{cases}$. ¿En qué puntos es discontinua?

8. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}-x+3 & \text{si } x\leq 0\\ 2x-4 & \text{si } x>0\end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$

9. Estudia la continuidad en $x=8$ de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases}x+7 & \text{si } x\geq 8\\ x-7 & \text{si } x<8\end{cases}$

10. Estudia la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases} x+6 & \text{si } x\le 0 \\ 2x+6 & \text{si } x>0 \end{cases}$

11. Estudia la continuidad de las funciones:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & -2<x\le 1 \\ x^2+4 & 1<x<2 \\ 7 & x=2 \\ 2x+4 & 2<x<5 \\ 3x-1 & 5\le x<6 \\ \dfrac{-3x+1}{x-7} & x>6 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} 4x+5 & x<0 \\ x+5 & 0\le x<1 \\ 6x & 1<x<2 \\ -4x & 2<x<3 \\ \dfrac{x^2-9}{-x+3} & 3<x\le 7 \\ \dfrac{1}{x-10} & x>7 \end{cases} \qquad j(x)=\frac{x^2-4}{x^3+6x^2+8x}$$

12. Halla k para que las siguientes funciones sean continuas:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-8x^2+20x-16} & x\ne 2 \\ k+1 & x=2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} & x<1 \\ k & x=1 \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{5-x}-2} & x>1 \end{cases}$$

13. ¿En qué intervalo es continua la función $f(x)=\sqrt{-(x+5)(x-3)}$?

14. ¿Cómo deberá definirse $f(1)$ para que la función $f(x)=\dfrac{5-\sqrt{24+x}}{x-1}$ $x\ne 1$, sea continua en $x=1$?

15. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^3\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

16. Se considera la función $f(x)$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ 3x+b & \text{si } 0\le x<2 \\ ax^2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Calcula los valores de *a* y *b* para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos.

17. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x^2+2 & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Calcular a para que la función f sea continua en $x=-1$.

18. Calcula los valores de M y N para que la función f sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-3x^3-11x^2+23x+6}{x^2+x-6} & \text{si } x\neq -3 \text{ y } x\neq 2 \\ N & \text{si } x=-3 \\ M & \text{si } x=2 \end{cases}$$

19. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

c) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=2 \\ \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{si } x\leq 0 \\ -x^2+14 & \text{si } 0<x\leq 3 \\ \sqrt{x^2+16} & \text{si } x>3 \end{cases}$

20. Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+b & x\leq -1 \\ 3x^2+4 & -1<x<1 \\ -x^3+8 & x\geq 1 \end{cases}$ calcula el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x=-1$. ¿Es continua en $x=1$?

21. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-8x^2+20x-16} & \text{si } x\neq 2 \text{ , } x\neq 4 \\ k+1 & \text{si } x=2 \\ -\dfrac{3}{2} & \text{si } x=4 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ k & \text{si } x=1 \end{cases}$

22. Calcula a y b para que sea continua la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & x\leq -1 \\ b & -1<x<3 \\ 2x+4 & x\geq 3 \end{cases}$

23. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\left|1-x^2\right|$.

24. Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1\\ 3 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$$

25. Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x\leq 1\\ x-1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

26. Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\leq 0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

27. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, clasificando sus discontinuidades:

a) $f(x)=\begin{cases}|x-3| & \text{si} \quad x\neq -3\\ 2 & \text{si} \quad x=-3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}9-x^2 & \text{si} \quad x\leq 2\\ 3x+2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x\leq 1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x<4\\ \sqrt{x-4} & \text{si} \quad x\geq 4\end{cases}$