Paradoja de Monty Hall

La paradoja de Monty Hall es un problema matemático de probabilidad basado en el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal (Trato hecho). El problema fue bautizado con el nombre del presentador de dicho concurso: Monty Hall.

El enunciado más famoso del problema, extraído de una carta de Craig F. Whitaker a la columna de Marilyn vos Savant en Parade Magazine en 1990 (como la citan Bohl, Liberatore y Nydick), es el siguiente:

> Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Escoges una puerta, digamos la nº1, y el presentador, ***que sabe lo que hay detrás de las puertas***, abre otra, digamos la nº2, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: "¿No prefieres escoger la nº3?". ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

Intuitivamente parece que da igual mantener la elección o cambiar, sin embargo, el análisis probabilístico del problema nos dice que la mejor opción, en cuanto a probabilidad se refiere, es cambiar de elección, ya que se duplican las probabilidades. Como la respuesta correcta parece contradecir la intuición, es aparentemente una paradoja, y por eso, dicho problema se conoce como "Paradoja de Monty Hall". Vamos a verlo:

Solución "elemental" (combinatoria):

			Resultado	
Detrás de la puerta 1	**Detrás de la puerta 2**	**Detrás de la puerta 3**	***Si no cambia***	***Si cambia***
Cabra	Cabra	Coche	**Gana una cabra**	**Gana un coche**
Cabra	Coche	Cabra	**Gana una cabra**	**Gana un coche**
Coche	Cabra	Cabra	**Gana un coche**	**Gana una cabra**

Solución probabilística (bayesiana):

En primer lugar, nombramos los sucesos:

Llamamos:

$$\begin{cases} C = \text{ posición del coche } \Rightarrow C_i = \text{ el coche está en la } i-\text{ésima puerta } (i=1,2,3) \\ M = \text{ puerta abierta por Monty } \Rightarrow M_i = \text{ Monty abre la } i-\text{ésima puerta} \end{cases}$$

Supongamos que se ha elegido la puerta nº1 y que Monty abre la puerta nº2.

Sabemos que

$$P\left(C_1/M_2\right)=\frac{P\left(M_2/C_1\right)P\left(C_1\right)}{P\left(M_2\right)} \quad \text{y} \quad P\left(C_3/M_2\right)=\frac{P\left(M_2/C_3\right)P\left(C_3\right)}{P\left(M_2\right)}$$

Se tiene que $P\left(C_1\right)=P\left(C_3\right)=\frac{1}{3}$ (probabilidades a priori), que $P\left(M_2/C_1\right)=\frac{1}{2}$ y que $P\left(M_2/C_3\right)=1$ (verosimilitudes o probabilidades a posteriori), y como

$$P\left(C_1/M_2\right)+P\left(C_3/M_2\right)=1$$

resulta que

$$\begin{cases} P\left(C_1/M_2\right)=\dfrac{1}{3} \\ P\left(C_3/M_2\right)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

esto es, al cambiar de puerta se duplican las probabilidades.

Solución mediante variables aleatorias:

Sea $X:(\Omega,\mathrm{B},P)\to\{1,2,3\}$ la variable aleatoria detrás de la cual se encuentra el coche, e $Y:(\Omega,\mathrm{B},P)\to\{1,2,3\}$ la puerta que escoge aleatoriamente el candidato.

Las variables aleatorias X e Y son estocásticamente independientes.

Se $M:(\Omega,\mathrm{B},P)\to\{1,2,3\}$ lo que se encuentra detrás de la puerta que el moderador, de manera aleatoria, escoge (entre las que aún no se han abierto).

Se tiene que $P(M=\text{ cabra})=1$.

La probabilidad de que el candidato se lleve el coche bajo el supuesto de que él no cambia de puerta es

$$P\left(X=Y/M=\text{ cabra}\right)=\frac{P(X=Y)}{P(M=\text{ cabra})}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$$

y, por tanto, la probabilidad de que el candidato se lleve el coche bajo el supuesto de que él cambie de puerta es entonces:

$$P\left(X\neq Y/M=\text{ cabra}\right)=1-P(X=Y)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

<u>**Webgrafía:**</u>

Wikipedia: Problema de Monty Hall

https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Monty_Hall

Date un Vlog: La paradoja en la que cae el 90% de la gente...

https://www.youtube.com/watch?v=1BpTBzDQuRE