Pág. 125 → Junio de 2000 → 2° Bl. → A)

Calcular $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

Factorizamos el denominador

$$x^3+x^2-6x=0 \Rightarrow x(x^2+x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\begin{cases}2\\-3\end{cases}\end{cases}$$

$$x^3+x^2-6x = x(x+3)(x-2)$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

Para determinar A, B y C le damos a x los valores 0, 2 y −3:

$x=0 \Rightarrow$ (igualando los numeradores) $0+1 = A(0+3)(0-2)+B\cdot 0(0-2)+C\cdot 0(0+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{6}$

$x=-3 \Rightarrow B = -\frac{2}{15}$

$x=2 \Rightarrow C = \frac{3}{10}$

Por tanto: $\displaystyle\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{-\frac{1}{6}}{x} + \frac{-\frac{2}{15}}{x+3} + \frac{\frac{3}{10}}{x-2}$

Calculamos la integral:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = -\frac{1}{6}\int\frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{15}\int\frac{1}{x+3}\,dx + \frac{3}{10}\int\frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$\boxed{= -\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + \frac{3}{10}\ln|x-2| + C}$$

$\boxed{\text{Pág. 127} \rightarrow \text{Septiembre de 2000} \rightarrow 4^{\circ}\text{Bl.} \rightarrow \text{A)}}$

Calcular $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+2x+3}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{-2\pm 2i\sqrt{2}}{2}=-1\pm i\sqrt{2}$$

La vamos a resolver de otra forma:

$$\int\frac{3x}{x^2+2x+3}\,dx=\int\frac{3x+6-6}{x^2+2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{6x+6-6}{x^2+2x+3}\,dx=$$

Vamos buscando en el numerador la derivada del denominador

$$=\frac{1}{2}\int\frac{6x+6}{x^2+2x+3}\,dx-\frac{6}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx=$$

$$=\underbrace{\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx}_{\text{inmediata}}-\frac{6}{2}\underbrace{\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx}_{\text{cambio de variable}}$$

Calculamos $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

$$\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx=\int\frac{1}{x^2+2x+1+2}\,dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix}t=x+1\\ dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{1}{t^2+2}\,dt=\int\frac{1}{2\left(\frac{t^2}{2}+1\right)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

Por tanto:

$$\int\frac{3x}{x^2+2x+3}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx-\frac{6}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx=$$

$$\boxed{=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C}$$

$\boxed{\text{Pág. 128} \rightarrow \text{Otra propuesta 1 de 2000} \rightarrow 4^\circ \text{Bl.} \rightarrow \text{A)}}$

Calcular $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$

Efectuamos la división:

$$\begin{array}{l|l} x^4-3x^3 \quad -3x-2 & x^3-x^2-2x \\ \hline -x^4+x^3+2x^2 & x-2 \\ \quad -2x^3+2x^2-3x-2 & \\ \quad\ \ 2x^3-2x^2-4x & \\ \hline \qquad\qquad -7x-2 & \end{array}$$

$$\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x} = x-2+\frac{-7x-2}{x^3-x^2-2x}$$

Factorizamos el denominador:

$$x^3-x^2-2x=0 \Rightarrow x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-x-2=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$x^3-x^2-2x = x(x-2)(x+1)$$

Expresamos en fracciones simples la fracción $\dfrac{-7x-2}{x^3-x^2-2x}$

$$\frac{-7x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{-7x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$x=0 \Rightarrow$ (igualando numeradores) $-2A=-2 \Rightarrow A=1$

$x=2 \Rightarrow 6B=-16 \Rightarrow B=\dfrac{-8}{3}$

$x=-1 \Rightarrow 3C=5 \Rightarrow C=\dfrac{5}{3}$

$$\frac{-7x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{1}{x}+\frac{\frac{-8}{3}}{x-2}+\frac{\frac{5}{3}}{x+1}$$

Calculamos:

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int (x-2)\,dx + \int \frac{-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{x^2}{2}-2x+$$

$$+\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{8}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|-\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{5}{3}\ln|x+1|+C}$$

Pág. 128 → Otra propuesta 2 de 2000 → 2º Bl. → A)

Calcular $\displaystyle\int \frac{6x+10}{-x^3+x^2+x-1}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$-x^3+x^2+x-1 = (x-1)(x+1)(-x+1) = -(x+1)(x-1)(x-1) = -(x+1)(x-1)^2$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & & -1 & 0 & 1 \\
\hline
 & -1 & 0 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & 1 & -1 & \\
\hline
 & -1 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Cuidado al factorizar que el coeficiente de x^3 es -1.

Recuerda: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Raíces: $x_0, \dots, x_n$

Factorización: $P(x) = a_n(x-x_0)\dots(x-x_n)$

Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{6x+10}{-x^3+x^2+x-1} = \frac{6x+10}{-(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{-(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 - B(x+1)(x-1) - C(x+1)}{-(x+1)(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} \text{Raíces: } x=1 \Rightarrow \text{(igualando numeradores) } 16 = -2C \Rightarrow C = -8 \\ \qquad\quad x=-1 \Rightarrow 4 = 4A \Rightarrow A = 1 \\ \text{Valor: } x=0 \Rightarrow 10 = A+B-C \Rightarrow B = 1 \end{cases}$$

$$\frac{6x+10}{-x^3+x^2+x-1} = \frac{-6x+10}{-(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{-(x+1)} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{-8}{(x-1)^2}$$

Calculamos:

$$\int \frac{6x+10}{-x^3+x^2+x-1}\,dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - 8\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= -\ln|x+1| + \ln|x-1| - 8\int (x-1)^{-2}\,dx =$$

$$= -\ln|x+1| + \ln|x-1| - 8\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$\boxed{= -\ln|x+1| + \ln|x-1| + 8\,\frac{1}{x-1} + C}$$

Página 130 → Junio de 2001 → 2º Bl. → A)

Resuelve $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$

Factorización del denominador:

$$x(x^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow x^2-1 = (A+B)x^2+Cx+A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{igualando los términos en}) \begin{cases} (x^2): & A+B=1 \\ (x): & C=0 \\ (\text{indep.}): & A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{-1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \boxed{-\ln|x| + \ln|x^2+1| + C}$$

Página 131 → Septiembre de 2001 → 4º Bl. → A)

Calcula $\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2 \text{ (doble)} \end{cases}$$

$$x^3-4x^2+4x = x(x-2)^2$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x+2}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}{x(x-2)^2}$$

$$x+2 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \Rightarrow \left.\begin{cases} x=2 \Rightarrow 2C=4 \Rightarrow C=2 \\ x=0 \Rightarrow 4A=2 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \\ x=1 \Rightarrow 3 = A-B+C \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2| + 2\int (x-2)^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2| + 2\,\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{2}{(x-2)} + C}$$

Página 133 → Otra propuesta 2 de 2001 → 2ºBl. → A)

Resuelve $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$x^3+x = x(x^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2-x+1}{x^3+x} = \frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$x^2-x+1 = (A+B)x^2 + Cx + A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(igualando términos en)} \begin{cases} (x^2): & A+B=1 \\ (x): & C=-1 \\ (\text{indep.}): & A=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2+1}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$\boxed{= \ln|x| - \operatorname{arctg} x + C}$$

Página 136 → Septiembre de 2002 → 2ºBl. → A)

Calcula $\int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x+2} = \frac{x^2-2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}$$

Igualamos los numeradores y le damos valores a x:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow -1 = 3C \Rightarrow C = -\frac{1}{3} \\ x=0 \Rightarrow -2 = A-2B+2C \\ x=-1 \Rightarrow -1 = 4A-2B+C \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2 = A-2B-\frac{2}{3} \\ -1 = 4A-2B-\frac{1}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=\frac{2}{9} \\ B=\frac{7}{9} \end{array}$$

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x+2} = \frac{\frac{2}{9}}{x+2} + \frac{\frac{7}{9}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{3}}{(x-1)^2}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{7}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int (x-1)^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} =$$

$$\boxed{= \frac{2}{9}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} + C}$$

Página 137 → Reserva 1 de 2002 → 1er Bl. → A)

Calcula $\int (x^2+2x+1)\ln(x)\,dx$

Se resuelve integrando por partes:

$$\int (x^2+2x+1)\ln(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u=\ln x \rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=(x^2+2x+1)dx \rightarrow v=\frac{x^3}{3}+x^2+x \end{array}\right] =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3}+x+1\right)dx =$$

$$\boxed{= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} - x + C}$$

Página 141 → Septiembre de 2003 → 2º Bl. → A)

Calcula $\int_e^{e^3} \frac{\log x}{x}\,dx$

Igual que en el ejercicio anterior $\log x$ denota el logaritmo neperiano

(Ante la duda, se pregunta)

En primer lugar calculamos $\int \frac{\log x}{x}\,dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[t=\ln x \longrightarrow dt=\frac{1}{x}dx \right] =$$

$$= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_e^{e^3} = \frac{\ln^2 e^3}{2} - \frac{\ln^2 e}{2} = \frac{1}{2}\left(3^2-1^2\right) = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

Página 143 → Reserva 1 de 2003 → 3^{er} Bl. → A)

Resuelve la integral $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-3x+2}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x+2} = \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

Igualamos los numeradores

$$x^2+1 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

y le damos valores a x:

$$\begin{cases} x=1 \ : \ 3B = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{3} \\ x=-2 \ : \ 9C = 5 \Rightarrow C = \frac{5}{9} \\ x=0 \ : \ -2A+2B+C = 1 \Rightarrow A = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x+2} = \frac{\frac{4}{9}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{4}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \frac{5}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{9}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + \frac{5}{9}\ln|x+2| =$$

$$\boxed{= \frac{4}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{3(x-1)} + \frac{5}{9}\ln|x+2| + C}$$

Página 153 → Septiembre de 2005 → 2º Bl. → B)

Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2}\,dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x^{1/2}}{x^2}\,dx =$$

$$= \ln|x| + \int x^{-3/2}\,dx = \ln|x| + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = \ln|x| + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} =$$

$$= \boxed{\ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C}$$

Página 158 → Junio de 2006 → 2º Bl. → A)

Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$x^2-2x+1 = (x-1)^2$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1} = \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

$$x+2 = A(x-1)+B \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow 3 = B \\ x=0 \Rightarrow 2 = -A+B \Rightarrow A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1} = \frac{5}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = \boxed{\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C}$$

Pág. 159 → Septiembre de 2006 → 2ºBl. → A)

Calcula la siguiente integral $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$

Efectuamos la división:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & & +1 & x^2+4 \\ \cline{5-5} -x^3 & & -4x & & x \\ \hline & & -4x & +1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+1}{x^2+4} = x + \frac{-4x+1}{x^2+4}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{-4x+1}{x^2+4}\,dx$$

Calculamos $\int \frac{-4x+1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{x^2+4}\,dx - 4\int \frac{x}{x^2+4}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx - 4\,\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx - 2\ln|x^2+4| = 2\,\frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx -$$

$$- 2\ln|x^2+4| = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln|x^2+4| + C$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln|x^2+4| + C}$$

Página 164 → Junio de 2007 → 2° Bl. → A)

Calcula la siguiente integral $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \to t^2 = x \\ \qquad dx = 2t\,dt \end{array}\right] =$$

$$= 2\int \frac{1}{1+t}\,2t\,dt = 4\int \frac{t}{1+t}\,dt \underset{①}{=}$$

$$\begin{array}{r|l} t & t+1 \\ \hline -t-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \qquad \frac{t}{1+t} = 1 + \frac{-1}{t+1}$$

$$\int \frac{t}{1+t}\,dt = \int 1\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt = t - \ln|t+1|$$

$$\underset{①}{=} 4\left(t - \ln|t+1|\right) = \boxed{4\left(\sqrt{x} - \ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right) + C}$$

Página 165 → Septiembre de 2007 → 2° Bl. → A)

Calcula la siguiente integral $\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3}$$

$$x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C = Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ 2A+B = 1 \\ A+B+C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{array}\right.$$

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{0}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^3}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \boxed{-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C}$$

- También se puede resolver haciendo el cambio de variable $t = x+1$.

Página 166 → Reserva 1 de 2007 → 2ºBl. → B)

Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ que pase por el origen de coordenadas.

Primitiva de $f(x)$:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \rightarrow v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x - \int -\cos x \,(2x)\, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \overset{①}{=}$$

Calculamos $\int x \cos x \, dx$ por partes:

$$\int x \cos x \, dx = \begin{bmatrix} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\overset{①}{=} -x^2 \cos x + 2\left(x \operatorname{sen} x + \cos x\right) + C = F(x)$$

Imponemos que pase por el origen de coordenadas

Eso quiere decir que $F(0) = 0 \iff -0^2 \cos 0 + 2(0 \cdot \operatorname{sen} 0 + \cos 0) + C = 0$

$\iff 2 + C = 0 \iff C = -2$

Por tanto, la primitiva que nos piden es:

$$\boxed{\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2\left(x \operatorname{sen} x + \cos x\right) - 2}$$

Página 168 → Reserva 2 de 2007 → 2º Bl. → B)

Calcula la siguiente integral: $\int \frac{-x+3}{4x^2+9}\,dx$

Factorizamos el denominador:

$$4x^2+9=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-9}{4}}=\pm\frac{3}{2}i \in \mathbb{C}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{-x+3}{4x^2+9}\,dx = -\int \frac{x}{4x^2+9}\,dx + 3\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx \overset{(1)}{=}$$

Resolvemos $\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{4x^2}{9}+1\right)}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}\,dx =$

$$=\frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} -\frac{1}{8}\ln|4x^2+9| + 3\,\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{8}\ln|4x^2+9| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right)+C}$$

Página 169 → Junio de 2008 → 2º Bl. → A)

Calcula la integral $\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}\,dx$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -9x^2 & +9x & +6 & x^2-5x+6 \\ \hline -2x^3 & +10x^2 & -12x & & 2x+1 \\ \hline & x^2 & -3x & +6 & \\ & -x^2 & +5x & -6 & \\ \hline & & 2x & & \end{array}$$

$$\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6} = 2x+1+\frac{2x}{x^2-5x+6}$$

$$\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}\,dx = \int (2x+1)\,dx + \int \frac{2x}{x^2-5x+6}\,dx \overset{(1)}{=}$$

$$\int \frac{2x}{x^2-5x+6}\,dx \overset{(2)}{=} \int \frac{-4}{x-2}\,dx + \int \frac{6}{x-3}\,dx =$$

$$= -4\ln|x-2| + 6\ln|x-3|$$

$$\overset{(1)}{=} \boxed{x^2+x-4\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C}$$

donde en (2) hemos descompuesto en fracciones simples:

$$\frac{2x}{x^2-5x+6} = \frac{2x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-4}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

Página 174 → Reserva 2 de 2008 → 2º Bl. → B)

Calcula las siguientes integrales: a) $\int \ln x \, dx$; b) $\int tg\, x \, dx$

a) $\int \ln x\, dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{matrix}\right] = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx =$

$= \boxed{x \ln x - x + C}$

b) $\int tg\, x\, dx = \int \frac{sen\, x}{cos\, x} dx = - \int \frac{-sen\, x}{cos\, x} dx = \boxed{-\ln |cos\, x| + C}$

Página 178 → Reserva 1 de 2009 → 2º Bl. → A)

Fórmula de integración por partes

Sean $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y f y g dos funciones con derivadas continuas en D. Entonces: $\int f g' = f g - \int f' g$

Calcular $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x\, dx$

$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x\, dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \rightarrow v = x + \frac{1}{x} \end{matrix}\right] =$

$= \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - \int \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx = \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx =$

$= \boxed{\left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x - x + \frac{1}{x} + C}$

Página 182 → Junio de 2010 → Propuesta B → B)

Calcula la integral indefinida $\int \frac{cos\, x}{1 + sen^2 x} dx$

$\int \frac{cos\, x}{1 + sen^2 x} dx = \boxed{arctg\,(sen\, x) + C}$

- También se puede hacer usando el cambio de variable $t = sen\, x$

$\int \frac{cos\, x}{1 + sen^2 x} dx = \left[\begin{matrix} t = sen\, x \\ dt = cos\, x\, dx \longrightarrow dx = \frac{1}{cos\, x} dt \end{matrix}\right] =$

$= \int \frac{cos\, x}{1 + t^2} \frac{1}{cos\, x} dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt = arctg\,(t) = arctg\,(sen\, x) + C$

Página 180 → Reserva 2 de 2009 → 2°Bl. → A)

Calcula la integral indefinida $\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}\,dx$

Efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-9x^2+9x+6 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} -2x^3+10x^2-12x & 2x+1 \\ \hline x^2-3x+6 & \\ -x^2+5x-6 & \\ \hline 2x & \end{array}$$

$$\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6} = 2x+1+\frac{2x}{x^2-5x+6}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x}{x^2-5x+6} = \frac{2x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\begin{cases}2\\3\end{cases}$$

Igualamos los numeradores: $2x = A(x-3)+B(x-2)$

Le damos valores: $x=2 \Rightarrow 4=-A \Rightarrow A=-4$

$x=3 \Rightarrow 6=B$

$$\frac{2x}{x^2-5x+6} = \frac{-4}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}\,dx = \int (2x+1)\,dx + \int \frac{2x}{x^2-5x+6}\,dx =$$

$$= x^2+x+\int \frac{-4}{x-2}\,dx + \int \frac{6}{x-3}\,dx =$$

$$\boxed{= x^2+x-4\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C}$$

Página 184 → Septiembre de 2010 → Propuesta B → B)

Fórmula de integración por partes

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\int (fg)' = \int f'g + \int fg'$$

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

$$\boxed{\int fg' = fg - \int f'g}$$

Calcular $\int x \log x \, dx$ ($\log x \equiv$ logaritmo neperiano de x)

$$\int x \log x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \longrightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C}$$

Página 185 → Reserva 1 de 2010 → Propuesta B → B)

Calcula la integral indefinida $\int \frac{1}{x^3+x^2}dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

Igualamos los numeradores: $1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$

y le damos valores:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow B=1 \\ x=-1 \Rightarrow C=1 \\ x=1 \Rightarrow 2A+2B+C=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{array}$$

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

Resolvemos:

$$\int \frac{1}{x^3+x^2}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \boxed{-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C}$$

$\boxed{\text{Página 187} \longrightarrow \text{Reserva 2 de 2010} \longrightarrow \text{Propuesta B} \longrightarrow \text{B)}}$

Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt{x+1} & \longrightarrow t^2 = x+1 \\ & 2t\,dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{t^2+1}{t}\,2t\,dt =$$

$$= 2\int (t^2+1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right) = \boxed{2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} + \sqrt{x+1}\right) + C}$$