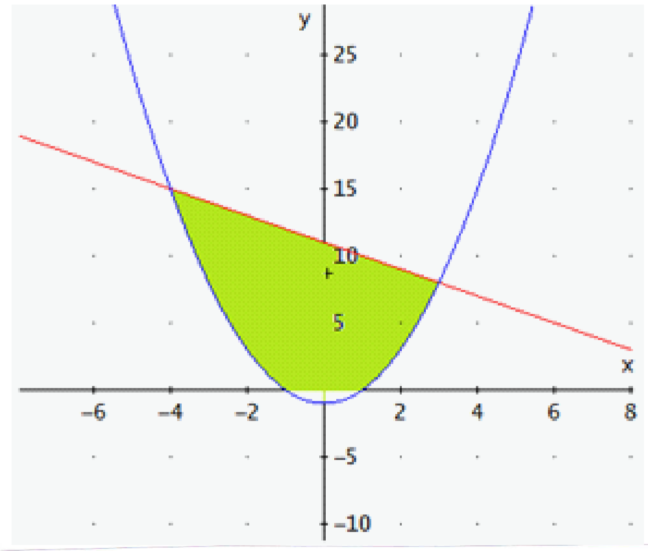
Página 125 → Junio de 2000 → 4º Bl. → A)

Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.



$$A = \int_a^b [(11-x) - (x^2-1)]\,dx - \int_c^d (x^2-1)\,dx$$

donde a y b son los puntos de corte de $y = 11-x$ e $y = x^2-1$, y c y d son los puntos donde $y = x^2-1$ corta al eje OX.

Puntos de corte de las funciones

$$11 - x = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$$

Puntos donde $y = x^2 - 1$ corta al eje OX

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Área

$$A = \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12)\,dx - \left| \int_{-1}^{1} (x^2-1)\,dx \right| = \frac{343}{6} - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{335}{6}\ u^2}$$

$$\int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12)\,dx = \left. \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right|_{-4}^{3} = \frac{343}{6}$$

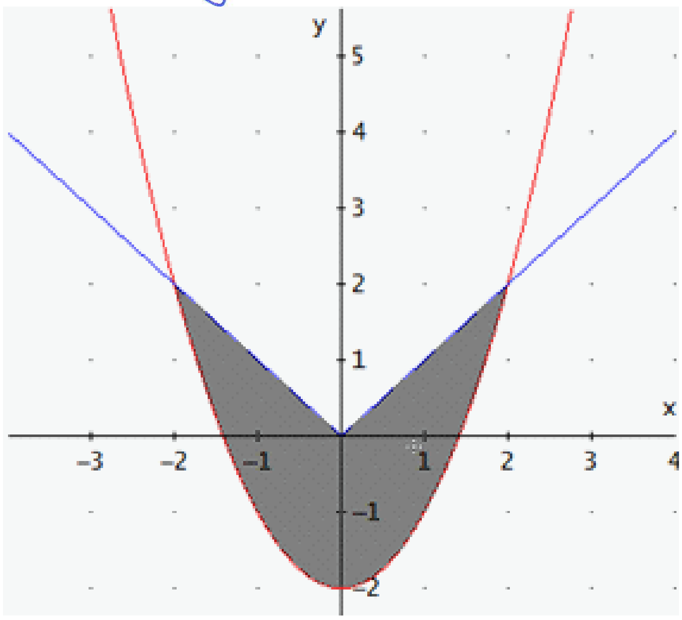
$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)\,dx = \left. \frac{x^3}{3} - x \right|_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)\right) = \frac{1}{3} - 1 - \left(\frac{-1}{3} + 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3} - 2 = \frac{-4}{3}$$

$\boxed{\text{Página 126} \rightarrow \text{Septiembre de 2000} \rightarrow 1^{er} \text{ Bl.} \rightarrow \text{A)}}$

Hallar el área del recinto plano delimitado por la ecuación $y = x^2 - 2$ e $y = |x|$. Dibujar el recinto.



Puntos de corte

$x^2 - 2 = |x| \Rightarrow x^2 - 2 = \pm x$

$x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -1 \text{ No} \end{cases}$

$x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 1 \text{ No} \end{cases}$

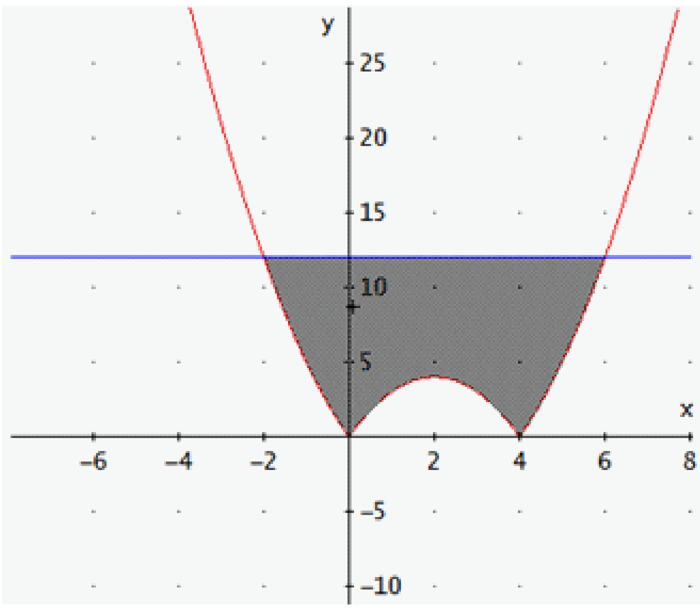
Área

$$A = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)\,dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_0^2\right) = \boxed{\frac{20}{3}\,u^2}$$

$\boxed{\text{Página 127} \rightarrow \text{Otra propuesta 1 de 2000} \rightarrow 3^{er} \text{ Bl.} \rightarrow \text{A)}}$

Calcular el área de la región plana limitada por la curva $f(x) = |x^2 - 4x|$ y la recta $y = 12$. Dibujar el recinto.



Puntos de corte

$|x^2 - 4x| = 12 \Rightarrow x^2 - 4x = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$

Área

$$A = \int_{-2}^{6} (12 - (x^2 - 4x))\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{6} (12 - x^2 + 4x)\,dx = 12x - \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \Big|_{-2}^{6} =$$

$$\boxed{= 64\,u^2}$$

De otra forma:

$$A = \int_{-2}^{6} [12 - |x^2 - 4x|]\,dx = \int_{-2}^{0} [12 - (x^2 - 4x)]\,dx + \int_0^4 [12 + (x^2 - 4x)]\,dx +$$

$$+ \int_4^6 [12 - (x^2 - 4x)]\,dx = \frac{40}{3} + \frac{112}{3} + \frac{40}{3} = \boxed{64\,u^2}$$

Página 129 → Otra propuesta 2 de 2000 → 3er Bl. → A)

Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 4x$ y las tangentes a dicha gráfica en los puntos en que esta corta al eje de abscisas. Dibujar el recinto.

Puntos de corte con el eje OX

$$-2x^2+4x = 0 \Rightarrow x(-2x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x+4=0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Tangentes a $f(x)$ en $x=0$ y $x=2$

$\boxed{x_0=0}$ $\quad y - y_0 = f'(0)(x - x_0)$

$f'(x) = -4x + 4 \quad | \quad y_0 = f(0) = 0$

$f'(0) = 4 \quad | \quad x_0 = 0$

$\boxed{y = 4x}$ recta tangente a $f(x)$ en $x_0 = 0$

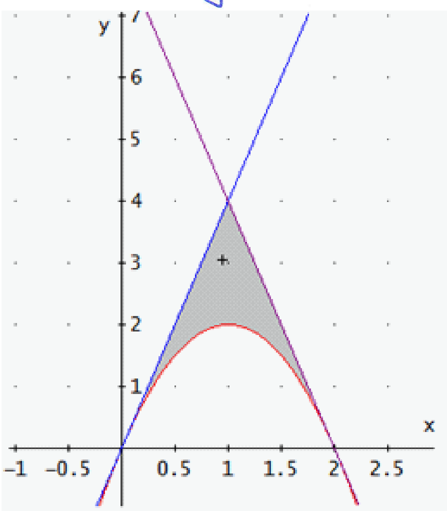
$\boxed{x_1=2}$ $\quad y - y_1 = f'(2)(x - x_1)$

$f'(2) = -4 \quad | \quad y_1 = f(2) = 0$

$x_1 = 2$

$y = -4(x-2)$
$= -4x + 8$ recta tangente a $f(x)$ en $x_1 = 2$

Representación gráfica



Área

$A = A_{triángulo} - A_{arco\ parábola} =$

$= \dfrac{2\cdot 4}{2} - \displaystyle\int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx =$

$= 4 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{12-8}{3} = \boxed{\dfrac{4}{3}\,u^2}$

De otra forma:

$$A = 2\int_0^1 (4x - (-2x^2+4x))\,dx = 2\left(\frac{\cancel{4x^2}}{\cancel{2}} + \frac{2x^3}{3} - \frac{\cancel{4x^2}}{\cancel{2}}\Big|_0^1\right) = 2\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\,u^2}$$

Pto en el que se cortan las tangentes

$4x = -4x + 8 \Rightarrow x = 8x = 8 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = 4}}$

Página 129 → Junio de 2001 → 1er Bl. → A)

Dada la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$:

a) Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

$f(x) = \frac{x^2}{4}$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(0,0)$

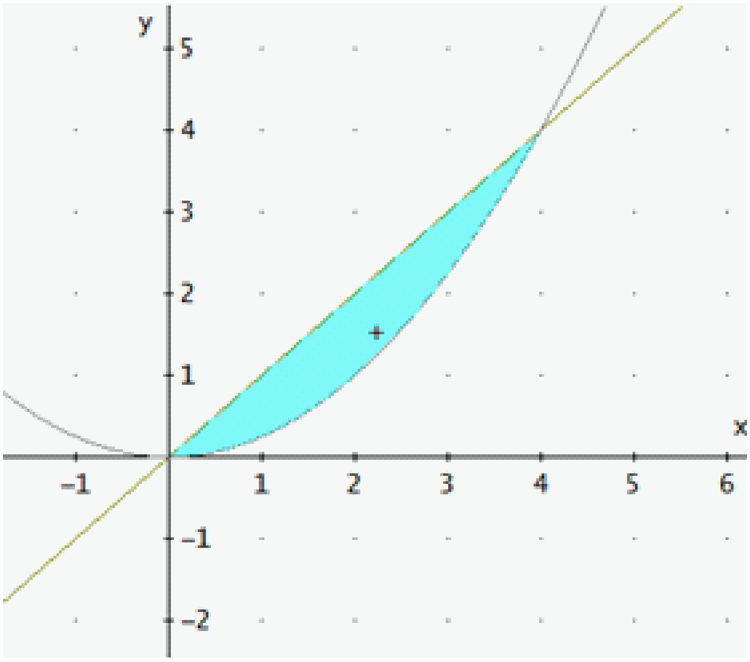
Tabla

x	2	4
y	1	4

$g(x) = x$

Tabla

x	y
0	0
2	2



Área:

$$A = \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \boxed{\frac{8}{3}\ u^2}$$

Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

Página 133 → Otra propuesta 1 de 2001 → 4º Bl. → A)

Dibuja el recinto delimitado por las curvas $y=-x^2+2x+3$ e $y=|x+1|$.
Halla el área del recinto.

$f(x) = -x^2+2x+3$

Vértice: $x_v = \dfrac{-2}{2\cdot(-1)} = 1$, $y_v = -1+2+3 = 4$ $\Big\} V(1,4)$

Puntos de corte con el eje OX

$f(x)=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0$

$\Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

$g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < 1 \end{cases}$

$x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$

$y = x+1$

x	y
-1	0
0	1

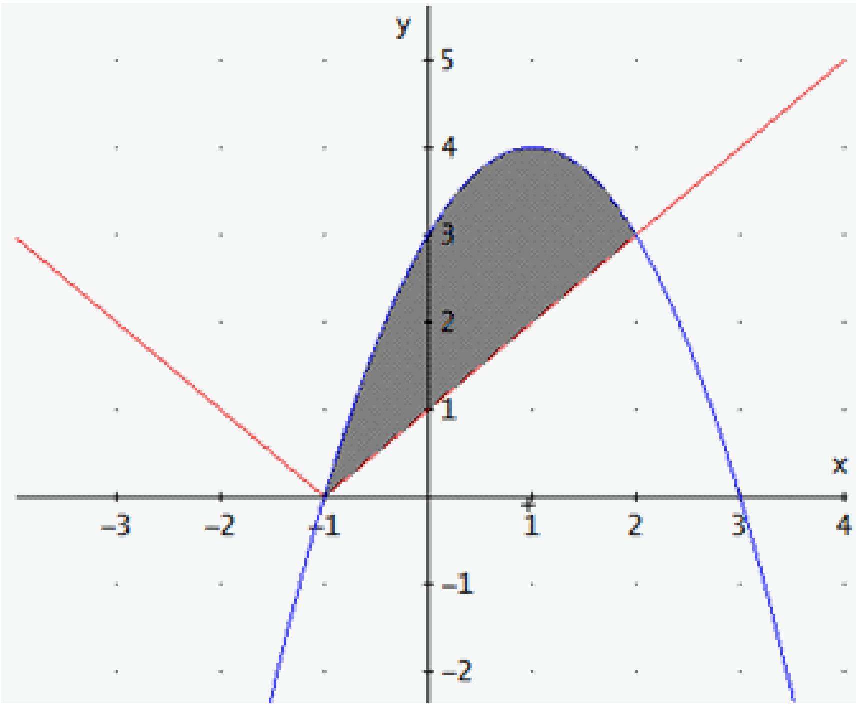
$y = -x-1$

x	y
¿-1?	0
-2	1
-3	2

Puntos de corte de f(x) y g(x)

$f(x)=g(x) \Rightarrow -x^2+2x+3 = |x+1| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x^2+2x+3 = x+1 & \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \\ -x^2+2x+3 = -x-1 & \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 4 \text{ No es sol.} \end{cases} \end{cases}$



Área:

$$A = \int_{-1}^{2} \big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \int_{-1}^{2} \big(-x^2+2x+3 - \underbrace{(x+1)}\big)\,dx = \boxed{\frac{9}{2}\,u^2}$$

En $[-1,2]$ $y=x+1$ es ≥ 0, luego coincide con $g(x)$

Página 133 → Otra propuesta 2 de 2001 → 1er Bl. → A)

Dada la función $y = xe^x$ y las rectas $x=1$, e $y=0$:

a) Dibuja la gráfica de la función para $x>0$ y la de las rectas.

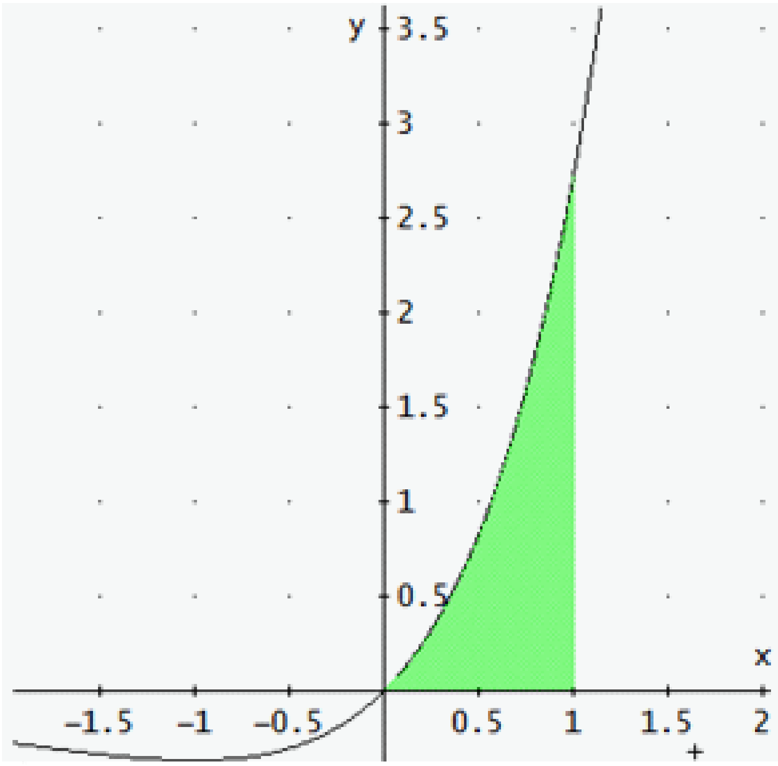
b) Señala el recinto plano comprendido entre las tres gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

$f(x) = xe^x, \ x>0$

$f'(x) = e^x + xe^x > 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$ y continua

x	¿0?	1	2	3
$f(x)$	0	e	$2e^2$	$3e^3$
$\simeq f(x)$	0	2,7	14,8	60,3



Área

$$A = \int_0^1 xe^x\,dx = xe^x - e^x \Big|_0^1 = 1\cdot e^1 - e^1 - (0\cdot e^0 - e^0) = \boxed{1 \ u^2}$$

Ptos de corte de $f(x)$ con las rectas dadas

$f(x)$ corta al eje OX $(y=0)$ en $x=0$

$f(x)$ corta a $x=1$ en $x=1$

Cálculo de $\int xe^x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x dx =$

$= xe^x - e^x$

Página 135 → Junio de 2002 → 3^er Bl. → A)

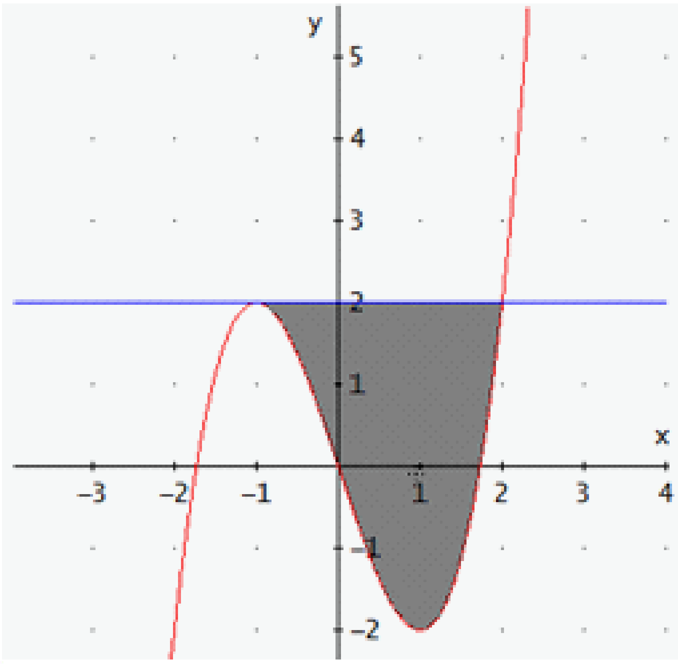
Halla la ec. de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$. Calcula el área del recinto limitado por la recta y la curva dada.

Ecuación de la recta tangente

$$y - y_0 = f'(-1)(x - x_0) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} y_0 = f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = 2 \\ x_0 = -1 \\ f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(-1) = 0 \end{cases}$$

$$y - 2 = 0(x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

Representación gráfica ó resolver la inecuación $f(x) > 2$



$f(x) > 2$

$x^3 - 3x > 2$

$x^3 - 3x = 2$

No	No	Sí
	-1	2

Es decir, en el intervalo $[-1, 2]$, que es el que nos interesa, $2 > x^3 - 3x$

Área:

$$A = \int_{-1}^{2} [2 - (x^3 - 3x)]\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)\,dx =$$

$$= \frac{-x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^{2} = \boxed{\frac{27}{4}\,u^2}$$

Puntos de corte de $f(x)$ y la recta $y = 2$

$$f(x) = 2 \Rightarrow x^3 - 3x = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0
2		2	2	
	1	1	0	

$$x = \begin{cases} -1 \ (\text{doble}) \\ 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Página 137} \rightarrow \text{Septiembre de 2002} \rightarrow 4^{\circ}\text{ Bl.} \rightarrow \text{A)}}$

Dadas las funciones $y = -x^2 + 4$ e $y = |x+2|$.

a) Dibuja ambas gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

$f(x) = -x^2 + 4$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = 0 \\ y_v = 4 \end{array}\right\} V(0,4)$

Puntos de corte:

$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$$y = |x+2| = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -(x+2) & x < -2 \end{cases}$$

$x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$

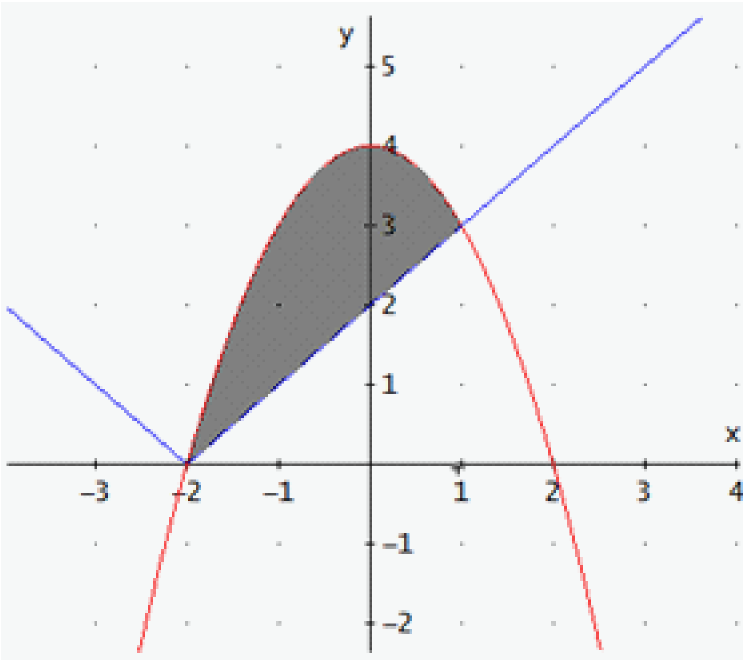
$y = x+2$

x	y
-2	0
-1	1

$y = -(x+2)$

x	y
¿-2?	0
-3	1
-4	2

Representación gráfica



Área

$$A = \int_{-2}^{1} [(-x^2+4) - (x+2)]\,dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \boxed{\frac{9}{2}\,u^2}$$

Puntos de corte:

$$-x^2 + 4 = |x+2| \Rightarrow -x^2+4 = \pm(x+2) \Rightarrow \begin{cases} -x^2+4 = x+2 \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \\ -x^2+4 = -(x+2) \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \text{ No es sol.} \\ -2 \end{cases} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Página } 139 \to \text{Reserva 2 de } 2002 \to 3^{er} \text{ Bl.} \to \text{A)}}$

Dada la curva $y = x^2 - 4x + 3$ y la recta $y = -x + 3$:

a) Dibuja la gráfica de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área de ese recinto.

$y = x^2 - 4x + 3$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_v = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1 \end{array}\right\} V(2,-1)$

Puntos de corte con el eje OX

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

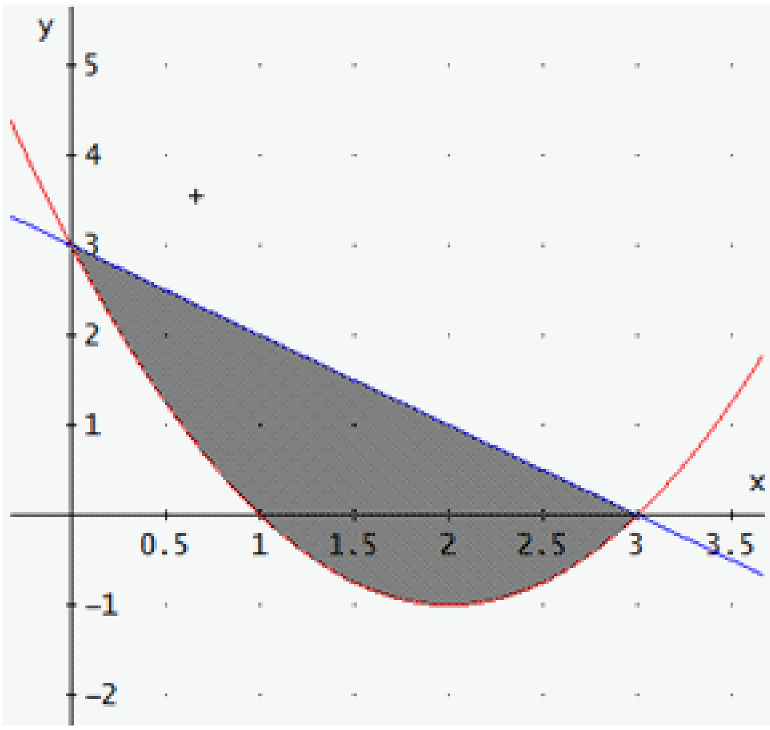
$y = -x + 3$

x	y
0	3
3	0

Puntos de corte de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x + 3$

$x^2 - 4x + 3 = -x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$



Área:

$$A = \int_0^3 \left[(-x+3) - (x^2 - 4x + 3)\right] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx =$$

$$= \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{-3^3}{3} + \frac{3\cdot 3^2}{2} = \boxed{\frac{9}{2}\ u^2}$$

Página 140 → Junio de 2003 → 3er Bl. → A)

Dada la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$.

a) Dibuja la gráfica de ambas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área del recinto señalado.

$f(x) = x^2 - 4x$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{4}{2} = 2 \\ y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \end{array}\right\} V(2,-4)$

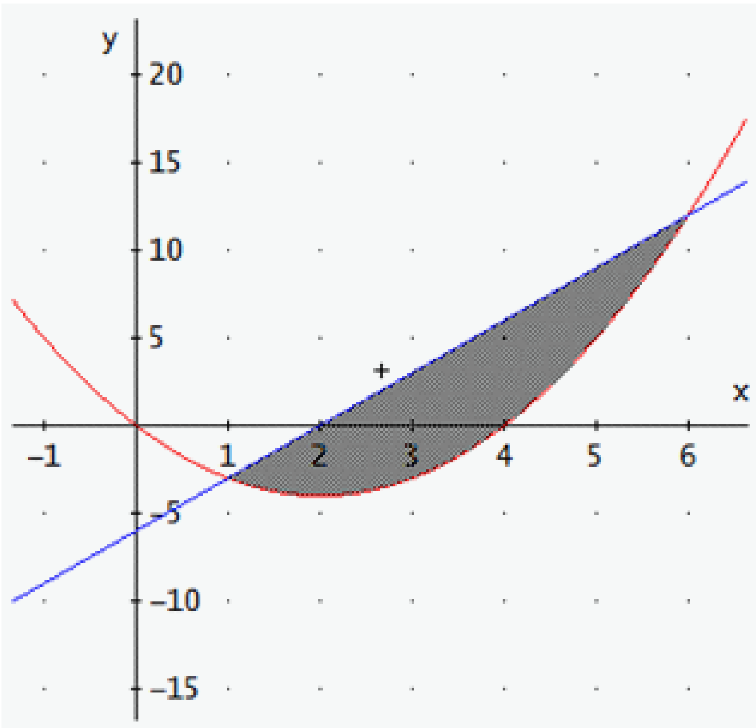
Puntos de corte con el eje OX

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$

$x(x-4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

$y = 3x - 6$

x	y
0	-6
6	0



Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x = 3x - 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$

Área:

$$A = \int_1^6 [(3x-6) - (x^2 - 4x)]\,dx = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6)\,dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x \Big|_1^6 = \left(-\frac{6^3}{3} + \frac{7 \cdot 6^2}{2} - 6 \cdot 6\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{7 \cdot 1^2}{2} - 6 \cdot 1\right) =$$

$$= \boxed{\frac{125}{6}\, u^2}$$

Página 142 → Reserva 1 de 2003 → 1er Bl. → A)

De la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$, y un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d.

- f tiene un máx. relativo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0$
- f tiene un pto. de inflexión en $(0,0) \Rightarrow \begin{cases} f''(0)=0 \\ f(0)=0 \end{cases}$
- $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$ es la 4ª condición

$$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x) = 6ax+2b$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = \boxed{3a+2b+c=0} \\ f''(0) = \boxed{2b=0} \Rightarrow b=0 \end{array}\right\} \boxed{3a+c=0} \ (1)$$

$$f(0) = \boxed{d=0}$$

$$\int_0^1 (ax^2+cx)\,dx = a\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a}{3}+\frac{c}{2} = \boxed{\frac{2a+3c}{6} = \frac{5}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(2a+3c) = 30$$

$$8a+12c = 30$$

$$\boxed{4a+6c=15} \ (2)$$

Resolvemos el sistema (1)-(2)

$$\left.\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ 4a+6c=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -\frac{5}{11} \\ c = \frac{15}{11} \end{array}}$$

Por tanto, la función es

$$\boxed{f(x) = -\frac{5}{11}x^3 + \frac{15}{11}x}$$

Página 145 → Reserva 2 de 2003 → 4º Bl. → A1

Dadas las curvas $y = \sqrt{3x}$ e $y = \frac{1}{3}x^2$.

a) Dibuja las gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área de dicho recinto.

$f(x) = \sqrt{3x}$

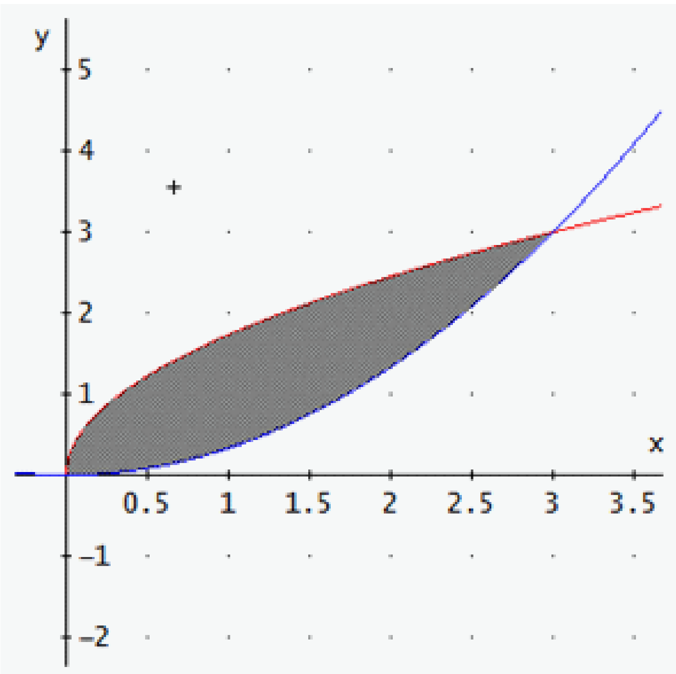
x	0	3
y	0	3

$g(x) = \frac{1}{3}x^2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(0,0)$

Tabla:

x	3	6	-3
y	3	12	3



Área:

$$A = \int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2\right) dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{3}\sqrt{x}\, dx - \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\, dx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^3 x^{1/2}\, dx - \frac{1}{3}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 =$$

$$= \sqrt{3}\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_0^3 - \frac{1}{3}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 =$$

$$= \boxed{3u^2}$$

Puntos de corte de f(x) y g(x)

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{3x} = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow 3x = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{x^4}{9} \Rightarrow 27x = x^4 \Rightarrow x^4 - 27x = 0 \Rightarrow x(x^3-27) = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow x(x-3)(x^2+3x+9) = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

Página 147 → Septiembre de 2004 → 2ºBl. → A)

Considera la función $f(x) = -x^4 + 4x^3$. Calcula:

a) Puntos de corte con los ejes.

b) Máximos y mínimos.

c) Puntos de inflexión.

d) Halla el área de la región encerrada por la gráfica y el eje OX.

a) $f(x)=0 \Rightarrow -x^4+4x^3=0 \Rightarrow x^3(-x+4)=0 \Rightarrow x=\begin{cases} 0 \text{ (triple)} \\ 4 \end{cases}$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son: $(0,0)$ y $(4,0)$

Con el eje OY: $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

b) $f'(x) = -4x^3+12x^2$

$f''(x) = -12x^2+12$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x^3+12x^2=0 \Rightarrow x^2(-4x+12)=0 \Rightarrow$

$x=\begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$

$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow x=0$ es un mín. relativo.

$f''(3) < 0 \Rightarrow x=3$ es un máx. relativo.

c) Puntos de inflexión

$f''(x) = 0 \Rightarrow -12x^2+12=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$f'''(x) = -24x$

$f'''(1) = -24 < 0 \Rightarrow x=1$ es un pto. de inflexión.

$f'''(-1) = 24 > 0 \Rightarrow x=-1$ " " " de inflexión.

d) Área

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (-x^4+4x^3)\,dx =$$

$$= -\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = -\frac{4^5}{5} + 4^4 =$$

$$= \boxed{\frac{256}{5}\,u^2}$$