CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRACIÓN

1. Calcular el área limitada por funciones $f(x)=(x^2-x)e^{-3x}$ y $g(x)=xe^{-3x}$.

Límites de integración:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow (x^2-x)e^{-3x}=xe^{-3x}\Rightarrow (x^2-2x)e^{-3x}=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=\begin{cases}0\\2\end{cases}$$

Área:

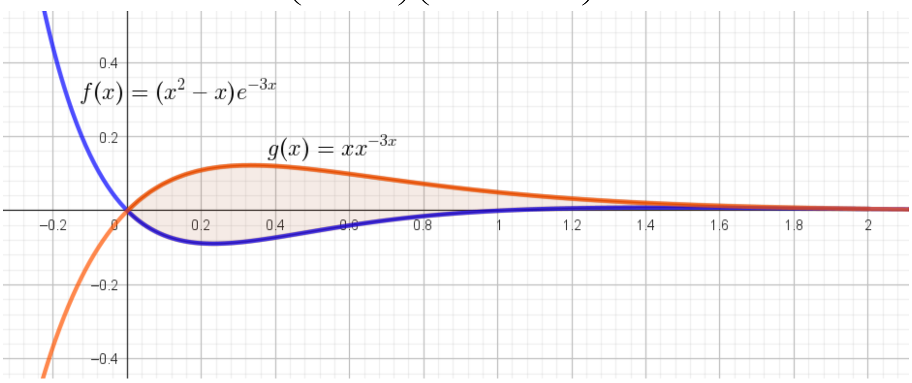
$$A=\left|\int_0^2\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|\int_0^2(x^2-2x)e^{-3x}dx\right|=\left|-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{4}{9}\right)\Big|_0^2\right|=\frac{8}{27}e^{-6}+\frac{4}{27}\ \text{u}^2$$

Primitiva:

$$\int(x^2-2x)e^{-3x}dx=\begin{bmatrix}u=x^2-2x & \Rightarrow & du=(2x-2)dx\\ dv=e^{-3x}dx & \Rightarrow & v=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{bmatrix}=(x^2-2x)\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)+\frac{2}{3}\int(x-1)e^{-3x}dx=$$

$$=\begin{bmatrix}u=x-1 & \Rightarrow & du=dx\\ dv=e^{-3x}dx & \Rightarrow & v=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{bmatrix}=(x^2-2x)\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)+\frac{2}{3}\left[(x-1)\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)-\int-\frac{1}{3}e^{-3x}dx\right]=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\left(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{4}{9}\right)+C$$



2. Calcular el área limitada por la función $f(x)=x^4$, el eje OY, y la recta tangente a dicha función en el punto $(1,1)$.

Recta tangente a $f(x)$ en $(1,1)$:

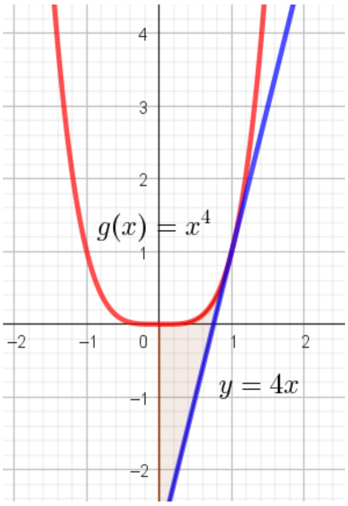
$$\left.\begin{array}{l}m=f'(1)\\ f'(x)=4x^3\end{array}\right\}\Rightarrow m=4\Rightarrow y-1=4(x-1)\Rightarrow y=4x-3$$

Límites de integración:

$$x^4=4x-3\Rightarrow x=1$$

Área:

$$A=\left|\int_0^1\left(x^4-(4x-3)\right)dx\right|=\left|\frac{x^5}{5}-2x^2+3x\Big|_0^1\right|=\frac{6}{5}\ \text{u}^2$$



3. Calcular el área limitada por las rectas $y=4x-3$, $y=-x+3$ y la función $f(x)=-x^2+4x-3$.

Límites de integración:

Cortes de las rectas: $y=4x-3$, $y=-x+3$

$$4x-3=-x+3\Rightarrow x=\frac{6}{5}$$

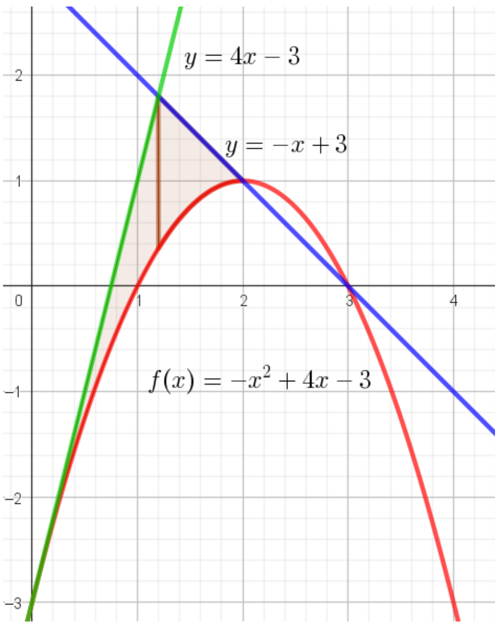
Corte de $y=4x-3$ y $f(x)=-x^2+4x-3$:

$$4x-3=-x^2+4x-3\Rightarrow x=0$$

Corte de $y=-x+3$ y $f(x)=-x^2+4x-3$:

$$-x+3=-x^2+4x-3\Rightarrow x=\begin{cases}2\\3\end{cases}$$

Gráfica:



Área:

Para calcular el área del recinto hay que tener en cuenta que en $x=\frac{6}{5}$ hay un cambio en la recta que interviene.

$$A=\left|\int_0^{6/5}\left[4x-3-\left(-x^2+4x-3\right)\right]dx\right|+$$

$$+\left|\int_{6/5}^{2}\left[-x+3-\left(-x^2+4x-3\right)\right]dx\right|=$$

$$=\left|\int_0^{6/5}x^2dx\right|+\left|\int_{6/5}^{2}\left(x^2-5x+6\right)dx\right|=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{6/5}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right)\Big|_{6/5}^{2}=$$

$$=\frac{16}{15}\ \text{u}^2$$

4. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = 4x - x^2$, la recta pendiente a dicha función en el punto de abscisa $x = 0$ y la recta $x = 2$.

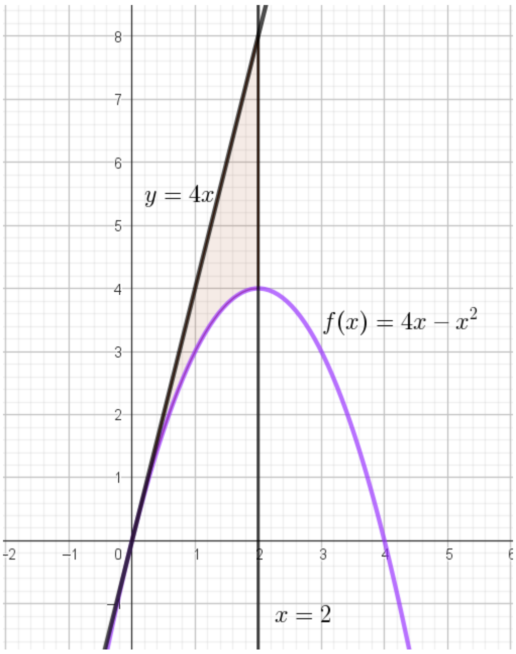
Recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} m = f'(0) \\ f'(x) = 4 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow m = 4 \Rightarrow y = 4x$$

Límites de integración:

$$4x - x^2 = 4x \Rightarrow x = 0$$

Gráfica:



Área:

$$A = \left| \int_0^2 \left[4x - \left(4x - x^2 \right) \right] dx \right| =$$

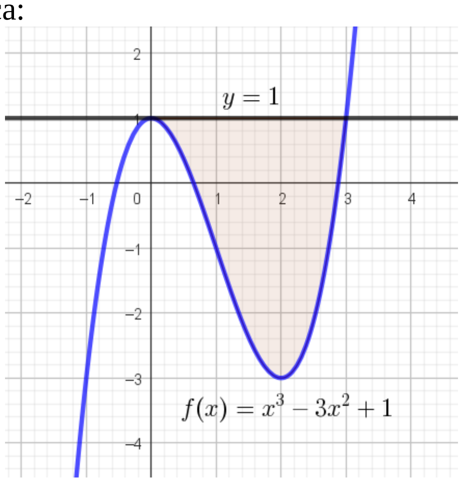
$$= \left| \int_0^2 x^2 dx \right| = \left| \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 \right| = \frac{8}{3} \text{ u}^2$$

5. Calcula el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ y la recta $y = 1$.

Límites de integración:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

Gráfica:



Área:

$$A = \left| \int_0^3 \left[1 - \left(x^3 - 3x^2 + 1 \right) \right] dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^3 \left(-x^3 + 3x^2 \right) dx \right| =$$

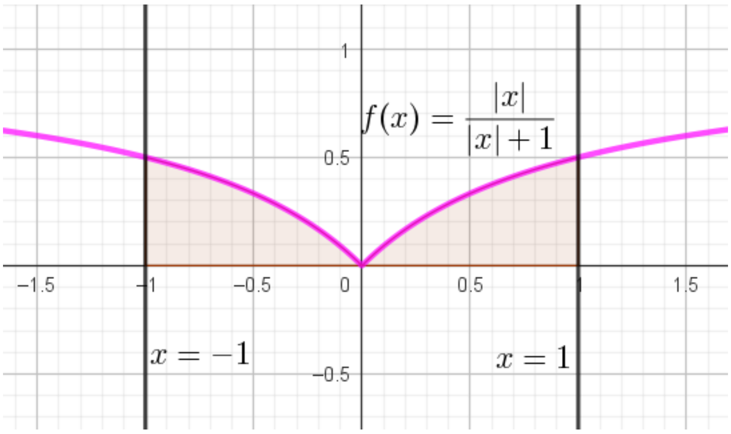
$$= \left| -\frac{x^4}{4} + x^3 \Big|_0^3 \right| = \frac{27}{4} \text{ u}^2$$

6. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|+1}$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Expresión a trozos de la función:

$$f(x)=\frac{|x|}{|x|+1}=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x\ge 0\\[2mm] \dfrac{-x}{-x+1} & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

Gráfica:



Área:

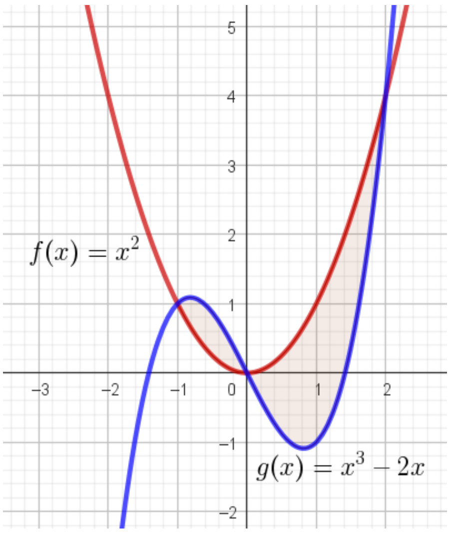
$$A=2\int_0^1\frac{x}{x+1}\,dx=$$
$$=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$
$$=2\left(x-\log(1+x)\right)\Big|_0^1=$$
$$=2\left(1-\log 2\right)\ \text{u}^2$$

7. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3-2x$.

Límites de integración:

$$x^2=x^3-2x\Rightarrow x=\begin{cases}-1\\0\\2\end{cases}$$

Gráfica:



Área:

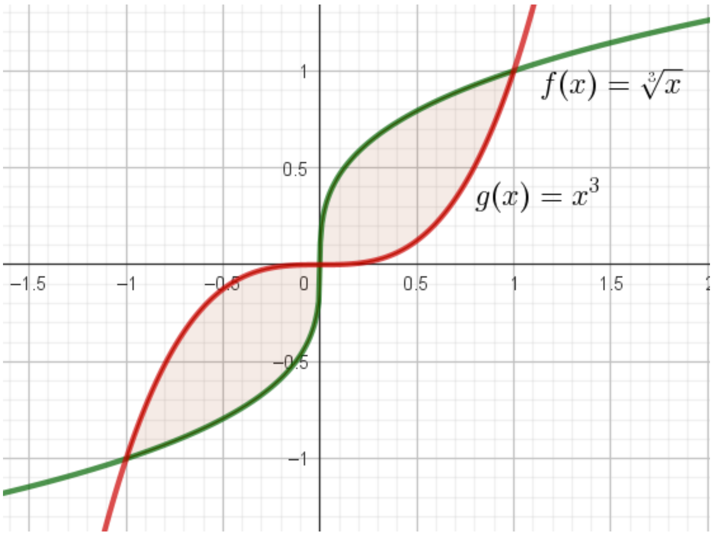
$$A=\left|\int_{-1}^{0}\left[x^2-\left(x^3-2x\right)\right]dx\right|+$$
$$+\left|\int_{0}^{2}\left[x^2-\left(x^3-2x\right)\right]dx\right|=$$
$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right|=$$
$$=\left|-\frac{5}{12}\right|+\left|-\frac{8}{3}\right|=\frac{37}{12}\ \text{u}^2$$

8. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ y $g\left(x\right)=x^3$.

Límites de integración:

$$\sqrt[3]{x}=x^3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3=\left(x^3\right)^3 \Rightarrow x=x^9 \Rightarrow x=\begin{cases}-1\\0\\1\end{cases}$$

Gráfica:



Área:

$$A=\left|\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+$$
$$+\left|\int_{0}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|=$$
$$=\left|\int_{-1}^{0}\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)dx\right|=$$
$$=\left|\left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}\right|=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\text{ u}^2$$

9. Calcular el valor del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para que el área bajo la curva $f\left(x\right)=x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=k$, coincida con el área bajo dicha curva, el eje de abscisas y las rectas $x=k$ y $x=2$.

Para que las áreas pedidas sean iguales, se tiene que verificar que:

$$\int_0^k f\left(x\right)dx=\int_k^2 f\left(x\right)dx \Rightarrow \int_0^k x^2dx=\int_k^2 x^2dx \Rightarrow \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^k=\left.\frac{x^3}{3}\right|_k^2 \Rightarrow \frac{k^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{k^3}{3} \Rightarrow 2k^3=8 \Rightarrow k=\sqrt[3]{4}$$

Esquema de lo que se pide: