CÁLCULO DE VOLÚMENES POR INTEGRACIÓN

1. Calcula el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{2}$ en el intervalo $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$ al girar alrededor del eje OX..

Solución:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_{1/2}^4\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2dx=\pi\int_{1/2}^4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)dx=\pi\left(\left.\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right|_{1/2}^4\right)=\pi\left(\frac{43}{3}-\frac{1}{24}\right)=$$
$$=\boxed{\frac{343}{24}\pi\ \text{u}^3}$$

2. Halla el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2}}$ en el intervalo $\left[\dfrac{3}{2},3\right]$ al girar alrededor del eje OX .

Solución:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_{3/2}^3\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)^2dx=\pi\int_{3/2}^3\frac{x^2-2}{2}dx=\pi\left(\left.\frac{x^3}{6}-x\right|_{3/2}^3\right)=\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{15}{16}\right)=\boxed{\frac{9}{16}\pi\ \text{u}^3}$$

3. Halla el volumen de una esfera de radio 5 cm haciendo girar la semicircunferencia $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ alrededor del eje OX .

Solución:
Los límites de integración son -5 y 5, y el volumen:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_{-5}^5\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-5}^5\left(25-x^2\right)dx=\pi\left(\left.25x-\frac{x^3}{3}\right|_{-5}^5\right)=\pi\left(\frac{250}{3}-\left(-\frac{250}{3}\right)\right)=$$
$$=\boxed{\frac{500}{3}\pi\ \text{u}^3}$$

Comprobación:

Recordemos que el volumen de una esfera viene dado por la fórmula

$$V_{\text{Esfera}}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

En nuestro caso:

$$V_{\text{Esfera}}=\frac{4}{3}\pi 5^3=\frac{500}{3}\pi\ \text{u}^3$$

4. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX los recintos limitados por las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$.

Solución:
El recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$, es la función $h(x)=\sqrt{x}-x^2$.

Los límites de integración son: $\sqrt{x}=x^2 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\1\end{cases}$

Así, el volumen pedido es:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)^2 dx=\pi\int_0^1\left(x+x^4-2x^{5/2}\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}-\frac{4}{7}x^{7/2}\Bigg|_0^1\right)=\pi\left(\frac{9}{70}-0\right)=$$

$$=\boxed{\frac{9}{70}\pi\ \mathrm{u}^3}$$

5. Dada la función $f(x)=\dfrac{4}{x+4}$ en el intervalo $[0,4]$, calcula el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girarla alrededor del eje OX.

Solución:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^4\left(\frac{4}{x+4}\right)^2 dx=\pi\left(-\frac{16}{x+6}\Bigg|_0^4\right)=\pi\left(-2-(-4)\right)=\boxed{2\pi\ \mathrm{u}^3}$$

6. Consideremos la región limitada por la recta $y=x-3$, la parábola $y=(x-5)^2$ y el eje OX. Calcular el volumen del cuerpo de revolución que se genera.

Solución:
El recinto limitado por las funciones es:
$h(x)=x-3-(x-5)^2=x-3-x^2-25+10x=-x^2+11x-28$

Los límites de integración son: $x-3=(x-5)^2 \Rightarrow x=\begin{cases}4\\7\end{cases}$

Por tanto, el volumen que nos piden es:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_4^7\left(-x^2-11x+28\right)^2 dx=\pi\int_4^7\left(x^4-22x^3+177x^2-616x+784\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{11x^4}{2}+59x^3-308x^2+784x\Bigg|_4^7\right)=\pi\left(\frac{7889}{10}-\frac{3904}{5}\right)=\boxed{\frac{81}{10}\pi\ \mathrm{u}^3}$$