Ejercicios de Análisis

1. Determina, razonadamente, las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+2}$

b) $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_1\\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_2\end{array}\right\}\ \exists\lim_{x\to a} f(x)\Leftrightarrow L_1=L_2$$

2. Determina, razonadamente, los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$, para que la función

$$f(x)=\begin{cases}1+\cos x & \text{si} \quad x\le 0\\ 2(a+x) & \text{si} \quad 0<x<1\\ \dfrac{b}{x^2} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Clasificación de las discontinuidades en a:

i) **Evitable**

Diremos que f presenta una **discontinuidad evitable** cuando

$$\begin{cases}\nexists f(a) \text{ pero } \lim\limits_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R}\\ \text{o}\\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\ne f(a)\end{cases}$$

ii) **No evitable**

ii-1) **De primera especie**

Diremos que f presenta una **discontinuidad de salto** (finito o infinito) cuando $\nexists\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ($\exists\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$, $\exists\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L'$ y $L\ne L'$):

Finito, si $L,L'\in\mathbb{R}$. En este caso el salto es $|L-L'|$.

Infinito, si $\begin{cases}L=\pm\infty\\ L'\in\mathbb{R}\end{cases}$ o $\begin{cases}L\in\mathbb{R}\\ L'=\pm\infty\end{cases}$.

Diremos que f tiene una **discontinuidad asintótica** en a cuando $\nexists\lim\limits_{x\to a} f(x)$ porque los límites laterales son infinitos y distintos o $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.

ii-2) **De segunda especie**

Diremos que f presenta una **discontinuidad de segunda especie o esencial**, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.

3. Determina y clasifica, razonadamente, los puntos de discontinuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(-x) & \text{si} \quad x<-2\\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad -2\le x\le 2\\ 0 & \text{si} \quad 2<x<4\\ x^2-12 & \text{si} \quad x\ge 4\end{cases}$$

4. Comprueba, razonadamente, si las siguientes funciones tienen una raíz en los intervalos que se indican:

a) $f(x)=x-x\operatorname{sen}x-\cos x$ en $[-\pi,\pi]$

b) $g(x)=x-\ln x-3$ en $[1,3]$

<u>**Teorema de Bolzano o Teorema de los ceros de Bolzano:**</u>
Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario $[\text{signo } f(a)\ne \text{signo } f(b)]$ entonces $\exists c\in(a,b): f(c)=0$.

5. Estudia, razonadamente, la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x|x|$

b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x\ge 0\\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x<0\end{cases}$

$$\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$$

6. La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ corta al eje de abscisas en $x=3$ y tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{9}\right)$. Determina, razonadamente, $a, b, c\in\mathbb{R}$.

7. Estudia, razonadamente, los extremos relativos y la monotonía de la función $f(x)=e^x+\ln x$

8. Calcula, razonadamente, a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$ pase por el punto $(-2,-6)$ y admita en dicho punto una tangente horizontal

9. Determina, razonadamente, los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{2x^2 - x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

10. Halla, razonadamente, el número positivo cuya suma con cuatro veces su inverso, sea mínima.

11. De todos los rectángulos de diagonal 1, halla razonadamente las dimensiones del de área máxima.

12. Calcula, razonadamente, las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int 2^x \operatorname{sen} x \, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1} dx$ (sugerencia: el cambio de variable $t^2 = 2x - 3$ puede ser útil)

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$

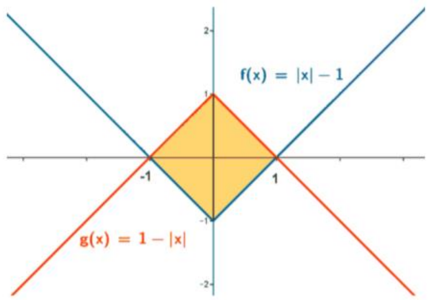
$$\int_a^b f(x)dx$$

13. Calcula, razonadamente, el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones:

a) $\begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 = 6y \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2 = 9x \\ y = \ln x \end{cases}$ y las rectas verticales $x = 1$ y $x = e$

c) $f(x) = |x| - 1$ y $g(x) = 1 - |x|$



SOLUCIONES

1. a) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2}{x+2}$

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2}{x+2}=\infty \Rightarrow x=-2$ es una asíntota vertical de $f\left(x\right)$

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to \infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2}{x+2}=\infty \Rightarrow f\left(x\right)$ no tiene asíntotas horizontales

Asíntotas oblicuas:

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^2}{x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+2x}=2 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^2}{x+2}-2x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x}{x+2}=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow y=2x-4 \text{ es una A.O. de } f\left(x\right)$$

b) $g\left(x\right)=\sqrt{x^2-1}$

Asíntotas verticales:

$\nexists a\in\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)=\infty \Rightarrow g\left(x\right)$ no tiene asíntotas verticales

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}=\infty \Rightarrow g\left(x\right)$ no tiene asíntotas horizontales

Asíntotas oblicuas:

$$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=\pm 1$$

$$n_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=\left[\dfrac{-1}{\infty}\right]=0$$

$$n_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\left[+\infty-\left(-\infty\right)\right]=+\infty$$

$$n_3=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\left(-x\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=+\infty$$

$$n_4=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\left(-x\right)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=\left[\dfrac{-1}{\infty}\right]=0$$

Como consecuencia, las rectas $y=1$ e $y=-1$ son AA.OO. de $g\left(x\right)$.

2. $$f(x)=\begin{cases} 1+\cos x & \text{si} \quad x\le 0 \\ 2(a+x) & \text{si} \quad 0<x<1 \\ \dfrac{b}{x^2} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones elementales bien definidas.

Continuidad en $x=0$: ¿$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(1+\cos x)=2=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left[2(a+x)\right]=2a \end{array}\right\}\Rightarrow 2=2a\Rightarrow a=1 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=0$$

Continuidad en $x=1$: ¿$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}2(a+x)=2a+2 \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{b}{x^2}=b=f(1) \end{array}\right\}\Rightarrow 2a+2=b\Rightarrow b=4 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=1$$

Conclusión: para $(a,b)=(1,4)$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

3. $$f(x)=\begin{cases} \ln(-x) & \text{si} \quad x<-2 \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2<x<4 \\ x^2-12 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones elementales bien definidas. Por tanto, tenemos que estudiar la continuidad/discontinuidad en $x=-2,\ x=2$ y $x=4$.

Continuidad en $x=-2$: ¿$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2-}\ln(-x)=\ln 2 \\ \lim\limits_{x\to -2+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2+}\operatorname{sen}(\pi x)=0=f(-2) \end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -2} f(x)\Rightarrow f(x)$$ no es continua en $x=-2$, y en dicho punto presenta una discontinuidad de salto finito.

Continuidad en $x=2$: ¿$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}\operatorname{sen}(\pi x)=0=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}0=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0=f(0)\Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=2$$

Continuidad en $x=4$: ¿$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4-} 0=0\\ \lim\limits_{x\to 4+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4+}\left(x^2-12\right)=4=f(4)\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x)\Rightarrow f(x)$$ no es continua en $x=4$, y en dicho punto presenta una discontinuidad de salto finito.

Conclusión: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-2,4\}$, y en $x=-2$ y en $x=4$ presenta discontinuidades de salto finito.

4. a) $f(x)=x-x\operatorname{sen}x-\cos x$ en $[-\pi,\pi]$

La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser diferencia y producto de funciones elementales bien definidas, luego en particular es continua en $[-\pi,\pi]$.

$f(-\pi)=-\pi-(-\pi)\operatorname{sen}(-\pi)-\cos(-\pi)=1-\pi<0$

$f(\pi)=\pi-\pi\operatorname{sen}(\pi)-\cos\pi=1+\pi>0$

Así, por el teorema de Bolzano, $\exists c\in(-\pi,\pi): f(c)=0$, esto es, la función tiene una raíz en dicho intervalo.

b) $g(x)=x-\ln x-3$ en $[1,3]$

La función es continua en $(0,+\infty)$ por ser diferencia de funciones elementales bien definidas, luego en particular es continua en $[1,3]$.

$g(1)=1-\ln 1-3<0$

$g(3)=3-\ln 3-3<0$

Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Bolzano en ese intervalo y, como consecuencia, no podemos asegurar que la función se anule (tenga una raíz) en el intervalo indicado.

5. a) $f(x)=x|x|=\begin{cases}x\cdot x & \text{si}\quad x\geq 0\\ x\cdot(-x) & \text{si}\quad x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2 & \text{si}\quad x\geq 0\\ -x^2 & \text{si}\quad x<0\end{cases}$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones polinómicas.
Continuidad en $x=0$: ¿$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(-x^2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x^2=0=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)$$ es continua en $x=0$.

Cada una de las funciones componentes es derivable en su dominio por ser funciones polinómicas.
Derivabilidad en $x=0$: ¿$\exists f'(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0)=0 \\ \quad y=-x^2 \\ \quad y'=-2x \\ f'_+(0)=0 \\ \quad y=x^2 \\ \quad y'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f'(0)=0 \Rightarrow f(x) \text{ es derivable en } x=0$$

Conclusión: la función es derivable (y continua) en $\mathbb{R}$.

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x\ge 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones racionales bien definidas.
Continuidad en $x=0$: ¿$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x}{1-x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{1+x}=0=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0.$$

Cada una de las funciones componentes es derivable en su dominio por ser funciones racionales bien definidas.
Derivabilidad en $x=0$: ¿$\exists f'(0)$?

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0)=1 \\ \quad y=\dfrac{x}{1-x} \\ \quad y'=\dfrac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} \\ f'_+(0)=1 \\ \quad y=\dfrac{x}{1+x} \\ \quad y'=\dfrac{1\cdot(1+x)-x\cdot 1}{(1+x)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f'(0)=1 \Rightarrow f(x) \text{ es derivable en } x=0$$

Conclusión: la función es derivable (y continua) en $\mathbb{R}$.

6. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

Si corta al eje de abscisas en $x=3$ eso quiere decir que $f(3)=0$

Si tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{9}\right)$, entonces $\begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9} \\ f''\left(\frac{2}{3}\right)=0 \end{cases}$

- $f(3)=0 \Rightarrow f(3)=3^3+3^2a+3b+c=0 \Rightarrow 27+9a+3b+c=0$
- $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2 a+\frac{2}{3}b+c=\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{8}{27}+\frac{4}{9}a+\frac{2}{3}b+c=\frac{1}{9} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 12a+18b+27c=-5$
- $f''\left(\frac{2}{3}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=3x^2+2ax+b \\ f''(x)=6x+2a \\ f''\left(\frac{2}{3}\right)=0 \Rightarrow 6\cdot\frac{2}{3}+2a=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 27+9a+3b+c=0 \\ 5+12a+18b+27c=0 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27-18+3b+c=0 \\ 5-24+18b+27c=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9+3b+c=0 \xrightarrow{\cdot(-6)} \\ -19+18b+27c=0 \end{cases} \begin{cases} -54-18b-6c=0 \\ \underline{-19+18b+27=0} \end{cases}$$

Sumamos: $-73+21c=0 \Rightarrow c=\frac{73}{21}$

Como $9+3b+c=0 \Rightarrow b=\dfrac{-\frac{73}{21}-9}{3}=-\frac{262}{63}$

$(a,b.c)=\left(-2,-\frac{262}{63},\frac{73}{21}\right)$

Conclusión: la función pedida es $f(x)=x^3-2x^2-\frac{262}{63}x+\frac{73}{21}$

7. $f(x)=e^x+\ln x$

Monotonía (crecimiento/decrecimiento) [signo de f']

$f'(x)=e^x+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow e^x+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \frac{xe^x+1}{x}=0 \Rightarrow xe^x+1=0 \Rightarrow xe^x=-1 \Rightarrow \ln\left(xe^x\right)=\ln(-1)$ que no existe, luego la ecuación no tiene soluciones reales y, por tanto, o siempre es creciente o siempre es decreciente. Ahora bien, como $f'(1)=e+1>0$, la función es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$ (que es su dominio).

Extremos relativos: no tiene, ya que es estrictamente creciente.

8. $f\left(x\right)=ax+b+\frac{8}{x}$

La gráfica de la función $f\left(x\right)=ax+b+\frac{8}{x}$ pase por el punto $\left(-2,-6\right)$:

$$f\left(-2\right)=-6\Rightarrow -2a+b-4=0\Rightarrow -2a+b=4\ \ f\left(-2\right)=-6$$

La función admite en dicho punto una tangente horizontal: si la tangente es horizontal, es porque la pendiente en cero, luego $f'\left(-2\right)=0$.

$$f'\left(x\right)=a-\frac{8}{x^2}\Rightarrow f'\left(-2\right)=a-2=0\Rightarrow a=2$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases}-2a+b=0\\ a=2\end{cases}\Rightarrow \left(a,b\right)=\left(2,2\right)$$

Conclusión: la función pedida es $f\left(x\right)=2x+2+\frac{8}{x}$

9. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+1\right)}{2x^2-x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+1\right)}{2x^2-x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{4x-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

Donde en (1) hemos aplicado la regla de L´Hôpital.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{6x}\underset{(3)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

Donde en (1), en (2) y en (3) hemos aplicado la regla de L´Hôpital.

10. Si el número es x, cuatro veces su inverso es $\frac{4}{x}$, luego la función a optimizar es

$$f\left(x\right)=x+\frac{4}{x}=\frac{x^2+4}{x}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+4\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$$

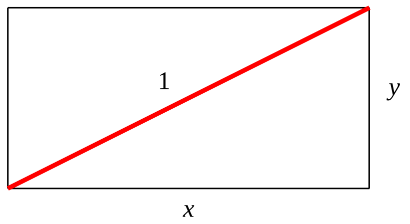
$$f'\left(x\right)=\frac{x^2-4}{x^2}=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow x=2 \text{ ya que el número pedido es positivo}$$

$$f''\left(x\right)=\frac{2x\cdot x^2-\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{x^4}=\frac{8}{x^3}$$

$$f''\left(2\right)=1>0\Rightarrow x=2 \text{ es un mínimo relativo}$$

Conclusión: el número pedido es 2.

11. Consideramos el rectángulo de la figura:



El área de dicho rectángulo es $A = xy$.

Ahora bien, por el teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = 1$, luego

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

Sustituyendo (1) en la expresión del área obtenemos:

$$A = x\sqrt{1-x^2} = A(x)$$

Optimizamos la función $A(x) = x\sqrt{1-x^2}$:

$$A'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A''(x) = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - \left(1-2x^2\right)\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\dfrac{2x^3-3x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{2x^3-3x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^3-3x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$$

$$A''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 < 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ es un máximo relativo}$$

Conclusión: las dimensiones del rectángulo pedido son: $\begin{cases} \text{base: } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{altura: } y = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

14. a) $\int 2^x \operatorname{sen} x \, dx$

$$\int 2^x \operatorname{sen} x \, dx = \begin{bmatrix} u = 2^x \xrightarrow{\text{derivamos}} du = 2^x \ln 2 dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \xrightarrow{\text{integramos}} v = -\cos x \end{bmatrix} = -2^x \cos x + \int 2^x \ln 2 \cos x dx =$$

$$= -2^x \cos x + \ln 2 \int 2^x \cos x dx \underset{(1)}{=} -2^x \cos x + \ln 2\left(2^x \operatorname{sen} x - \ln 2 \int 2^x \operatorname{sen} x dx\right)$$

Donde en (1) hemos vuelto a integrar por partes:

$$\int 2^x \cos x dx = \begin{bmatrix} u = 2^x \xrightarrow{\text{derivamos}} du = 2^x \ln 2 dx \\ dv = \cos x dx \xrightarrow{\text{integramos}} v = \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = 2^x \operatorname{sen} x - \ln 2 \int 2^x \operatorname{sen} x dx$$

Llamamos $I = \int 2^x \operatorname{sen} x \, dx$. Entonces:

$$I = -2^x \cos x + \ln 2\left(2^x \operatorname{sen} x - \ln 2 \cdot I\right) = -2^x \cos x + 2^x \ln 2 \operatorname{sen} x - \ln^2 2 \cdot I \Rightarrow$$

$$I + \ln^2 2 \cdot I = -2^x \cos x + 2^x \ln 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow I\left(1+\ln^2 2\right) = -2^x \cos x + 2^x \ln 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{-2^x \cos x + 2^x \ln 2 \operatorname{sen} x}{1+\ln^2 2} + C$$

b) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}dx$ (sugerencia: el cambio de variable $t^2 = 2x-3$ puede ser útil)

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = 2x-3 \Rightarrow t = \sqrt{2x-3} \\ 2tdt = 2dx \Rightarrow tdt = dx \end{array}\right] = \int \frac{t}{t+1}tdt = \int \frac{t^2}{t+1}dt \underset{(1)}{=} \int (t-1)dt + \int \frac{1}{t+1}dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| = \frac{2x-3}{2} - \sqrt{2x-3} + \ln\left|\sqrt{2x-3}+1\right| + C$$

Donde en (1) hemos efectuado la división:

$$\begin{array}{rl} t^2 & \underline{|t+1} \\ \underline{-t^2-t} & t-1 \\ -t & \\ \underline{t+1} & \\ 1 & \end{array} \Rightarrow \frac{t^2}{t+1} = t-1+\frac{1}{t+1}$$

d) $\int \frac{1}{x^3-3x^2+2x}dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3-3x^2+2x} = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$1 = A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

Si $x=0 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Si $x=1 \Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1$

Si $x=2 \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Integramos

$$\int \frac{1}{x^3-3x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C$$

15. a) $\begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 = 6y \end{cases}$

Las funciones vienen dadas en forma implícita, luego las pasamos a forma explícita:

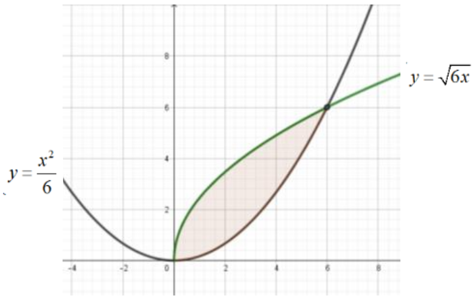
$$\begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{6x} \\ y = \frac{x^2}{6} \end{cases}$$

Límites de integración:

$$\sqrt{6x} = \frac{x^2}{6} \Rightarrow 6x = \frac{x^4}{36} \Rightarrow x^4 - 216x = 0 \Rightarrow x\left(x^3-216\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 216 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{216} = 6 \end{cases}$$

El área pedida es:

$$A=\left|\int_0^6\left(\sqrt{6x}-\frac{x^2}{6}\right)dx\right|=\left|\frac{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^3}{18}\Bigg|_0^6\right|=12\ \text{u}^2$$



b) $\begin{cases} y^2=9x \\ y=\ln x \end{cases}$ y las rectas verticales $x=1$ y $x=e$

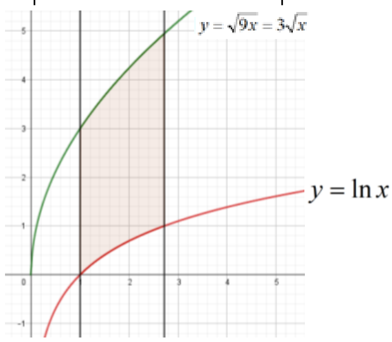
Una de las funciones está en forma implícita:

$$\begin{cases} y^2=9x \\ y=\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{9x}=3\sqrt{x} \\ y=\ln x \end{cases}$$

Límites de integración:
Los límites de integración vienen dados por las rectas verticales que nos dan.

Calculamos el área:

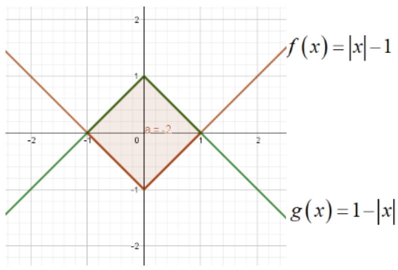
$$A=\left|\int_1^e\left(3\sqrt{x}-\ln x\right)dx\right|=\left|2x^{\frac{2}{3}}-\left(x\ln|x|-x\right)\Bigg|_1^e\right|=2\sqrt{e^3}-3\ \text{u}^2\simeq 5{,}96\ \text{u}^2$$



c) $f(x)=|x|-1$ y $g(x)=1-|x|$

Se tiene que $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x-1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ 1+x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$.

Representamos las funciones:



Área:

$$A = A_{\text{rombo}} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ u}^2$$

Mediante integrales:

$$A = \int_{-1}^{0} \left(-x-1-(1+x)\right)dx + \int_{0}^{1} \left(x-1-(1-x)\right)dx = \left|\int_{-1}^{0} (-2x-2)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (2x-2)dx\right| = |-1| + |-1| = 2 \text{ u}^2$$